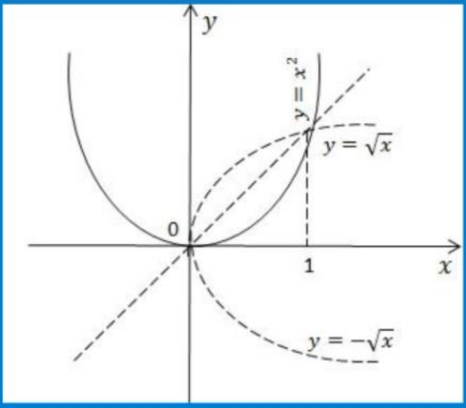
Мурзабаева А.Б.,
Камбарова А.Д.

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ

Практикалык колдонмо



I БӨЛҮК

Мурзабаева А.Б., Камбарова А.Д.

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ
1-БӨЛҮК

(Практикалык колдонмо)

Ош - 2025

УДК 517
ББК 22.161
М 91

Колдонмо ОшМУнун Окумуштуулар Кеңеши тарабынан басмага сунушталды. 2025-жылдын 7-марты. Протокол № 5

Рецензенттер:

Сопуев А. – физика-математика илимдеринин доктору, профессор

Холматов А. – физика-математика илимдеринин кандидаты, Кыргыз-Өзбек Университетинин доценти

Мурзабаева, А.Б., Камбарова, А.Д.

М 91 Математикалык анализ: практикалык колдонмо. 1-бөлүк. - Ош: 2025. -200 б.

ISBN 978-9967-06-109-5

Окуу колдонмо студентке математикалык анализ курсунун 1-семестринде маселелерди чыгарууда өз алдынча ыкмаларды колдонуп, мисалдарды чыгаруу көндүмдөрүнө ээ болууга жардам берүү болуп эсептелет.

Практикалык колдонмодо анализге киришүү, туунду жана дифференциал, дифференциалдык эсептөөлөрдүн колдонулушу, дифференциалдык эсептөөлөрдүн экономикадагы колдонулушу бөлүмдөрү каралган.

Бул колдонмо кыргыз тилинде окуган математика, физика, колдонмо математика жана информатика, программалоо, экономика багытындагы жалпысынан математикалык анализ окуган бардык багыттагы студенттердин 1-курстарына арналат.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-9967-06-109-5

© Мурзабаева А.Б., Камбарова А.Д., 2025

МАЗМУНУ

Киришүү--5

БАП 1. АНАЛИЗГЕ КИРИШҮҮ

§ 1.1. Функция түшүнүгү ---6

§ 1.2. Функциялардын графиктери -----------------------------------13

§ 1.3. Сандык удаалаштык жана анын предели ---------------------27

§ 1.4. Функциянын предели ---33

§ 1.5. Пределдерди эсептөө ---40

§ 1.6. Чексиз кичинелерди салыштыруу. Эквиваленттүүлүк ------50

§ 1.7. Үзгүлтүксүздүк жана функциялардын үзүлүү чекиттери --61

БАП 2. ТУУНДУ ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 2.1. Жөнөкөй функциялардын туундулары ------------------------68

§ 2.2. Татаал функциялардын туундулары ---------------------------70

§ 2.3. Туундунун сандык мааниси. Туундуну геометриялык жана механикалык чечмелөө ---80

§ 2.4. Функциянын дифференциалдары ------------------------------86

§ 2.5. Жогорку тартиптеги туундулар жана дифференциалдар ---92

§ 2.6. Айкын эмес жана параметрдик берилген функцияларды дифференцирлөө -------------------------------------97

БАП 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨРДҮН КОЛДОНУЛУШУ

§ 3.1. Орто маани жөнүндө теорема. Тейлордун формуласы -----102

§ 3.2. Лопиталдын эрежеси --112
§3.3. Функцияларды изилдөөгө жана графиктерди түзүүгө туундулардын колдонулуштары ---------------------------------------120
§ 3.4. Графиктерди түзүүдөгү жалпы схема -------------------------143
§ 3.5. Туундунун геометриялык колдонулушу ---------------------158

БАП 4. ТУУНДУНУН ЭКОНОМИКАДАГЫ КОЛДОНУЛУШУ

§ 4.1. Экономикадагы суммардык (жалпы) орто жана пределдик чоңдуктардын аныктамалары--163
§ 4.2. Экономиканын областынан функцияларды колдонуунун мисалдары---164
§ 4.3. Функциянын ийкемдүүлүгү жана анын экономикалык талдоодо колдонулушу--174
§ 4.4. Экономикадагы функцияны изилдөө. Пайданы максималдаштыруу---185
Жооптор --- 192
Адабияттар--199

КИРИШҮҮ

Математикалык анализ боюнча практикалык колдонмонун максаты, студентке математикалык анализ курсунун 1-семестринде маселелерди чыгарууда өз алдынча ыкмаларды колдонуп, мисалдарды чыгаруу көндүмдөрүнө ээ болууга жардам берүү болуп эсептелет. Колдонмодо жөнөкөй мисалдар келтирилген. Жогорку татаалдыктагы мисалдар келтирилген эмес, максатыбыз студентти негизги мисалдарды чыгарууга үйрөтүү, анткени студенттин математикалык анализ курсунун бакалавр программасынын талаптарын өздөштүрүү үчүн зарыл болгон билимдерин берүү. Практикалык колдонмодо анализге киришүү, туунду жана дифференциал, дифференциалдык эсептөөлөрдүн колдонулушу, дифференциалдык эсептөөлөрдүн экономикадагы колдонулушу бөлүмдөрү каралган.

Ар бир бөлүктө (бапта, параграфтарда) кыскача теориялык маалыматтар берилген жана маселени чечүү үчүн зарыл болгон формулалар келтирилген, көп мисалдар аларды чечүү ыкмаларын түшүндүрүү менен көрсөтүлгөн. Андан кийин өз алдынча иштөө үчүн мисалдардын катары жана алардын кээ бирлери көрсөтмөлөр менен берилген. Студентке чыгарылган мисалдар менен таанышуу окутуучу тараптан минималдык жардам көрсөтүлсө да берилген мисалдарды чыгаруунун негизги ыкмаларын өздөштүрүүгө мүмкүндүк берет.

Теориялык билимдерин тереңдетүү үчүн кыргыз тилиндеги “Математикалык анализ” 1-бөлүк, авторлор А.Бөрүбаев, К. Бараталиев, Б. Шабыкеев, Т. Аманкулов Бишкек 2019, М.Ш. Мамаюсупов “Жогорку математика боюнча окума” 2-бөлүк Ош-2018 адабияттардан окуса болот.

Азыркы мезгилде математикалык анализ боюнча студенттер үчүн кыргыз тилиндеги мисалдардын чыгарылышы менен көрсөтүлгөн практикалык колдонмолор жетишпейт. Математикалык анализ азыркы математикалык курстардын негизги өзөгүн түзөт. Бул колдонмонун башка окуу куралдарынан айырмачылыгы 4-бапта дифференциалдык эсептөөлөрдүн экономикадагы колдонулушу каралган. Ошондуктан, бул колдонмону математика, физика, колдонмо математика жана информатика, программалоо, экономика багытындагы жалпысынан математикалык анализ окуган бардык багыттагы студенттердин 1-курстарына 1-семестр үчүн сунуштайбыз.

БАП 1. АНАЛИЗГЕ КИРИШҮҮ

§ 1.1 ФУНКЦИЯ ТҮШҮНҮГҮ

1. Аныктамалар. Эгерде M көптүгүнүн ар бир x маанисине y аныкталган бир маани дал келсе, x көз каранды эмес өзгөрүлмөдөн (аргументтен) M көптүгүндөгү y өзгөрүлмө чоңдугу функция деп аталат. Эгерде y x тен функция болсо, анда $y = f(x)$, же $y = F(x)$, же $y = Y(x)$ ж.б.у.с менен жазылат. $f(a)$ символу менен $y = f(x)$ функциясынын жекече мааниси белгиленент, б.а $y = f(x)$ функциясынын $x = a$ болгондо кабыл алган маани. M көптүгү функциянын аныкталуу областы. Көпчүлүк учурларда функциянын аналитикалык жол $y = f(x)$ менен берилишинде бул функциянын аныкталуу областы көрсөтүлбөйт. Бул учурда функциянын аныкталуу областы деп $y = f(x)$ аналитикалык туюнтмасынын жашоо областын түшүнүшөт, б.а. $y = f(x)$ аналитикалык туюнтмасынын аныкталган чектүү маанилерге ээ болгон x аргументтин маанилеринин көптүгү эсептелинет.

Дээрлик бардык биз карай турган функциялар аныкталуу областы катары (a, b) бир интервалы, б.а. $a < x < b$ барабарсыздыгын канааттандырган бардык x чекиттердин жыйындысы, бир нече же мындай интервалдардын чексиз көптүгүн карайбыз.

Функциянын аныкталуу областы $(-\infty, a)$ же $(b, +\infty)$ жарым октору же $(-\infty, +\infty)$ бардык сан огу болсо интервал чексиз болушу мүмкүн. Айрым учурларда аныкталуу областына интервалдын учтары, бирөө же экөө тең таандык болушу мүмкүн. Бул учурда интервал туюк деп аталат жана $[a, b]$ деп белгиленет. Туюк интервалды кесинди деп да аташат.

Эгерде $f(-x) = f(x)$ барабардыгы орун алса, анда $y = f(x)$ функциясы жуп деп аталат. Мисалы, $y = x^4$, $y = \sin^2 x$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $y = \cos x$ жуп функциялар.

Эгерде $f(-x) = -f(x)$ барабардыгы орун алса, анда $y = f(x)$ функциясы так деп аталат. Мисалы, $y = x \quad y = \sqrt{x^3}$, $y = tgx$ так функциялар болушат.

Эгерде T оң саны жашап (функциянын мезгили), x тин каалагандай маанисинде $f(x + T) = f(x)$ барабардыгы орун алса $y = f(x)$ функциясы мезгилдүү деп аталат.
Мисалы, $y = \cos x$ функциясы 2π мезгили менен мезгилдүү функция болот, $y = \sin 2x$ функциясы π мезгилине ээ.

Эгерде $y = F(x)$ функциясын $y = f(\varphi(x))$ түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болсо, анда ал татаал функция деп аталат, мында $f(u)$ - u аралыктагы аргументтин функциясы, ал эми $f(\varphi(x))$ деген u нун ордуна $\varphi(x)$ функциясы коюлат дегенди түшүндүрөт. Мисалы, $y = \sqrt{\sin x}$ – татаал функция, эки звенодон турат: $y = \sqrt{u}$, $u = \sin x$. Ушуга окшош эле көп сандагы бөлүмдөрдөн турган татаал функция аныкталат. Мисалы,
$y = \lg^2(x + 1)$ – үч звенодон турган татаал функция: $y = u^2$, $u = \lg\nu$,
$\nu = x + 1$.

2. **Элементардык функциялар.** Негизги элементардык функциялар:

1. Даражалуу функция $y = x^a$. Аныкталуу областы каалаган a да бүт оң жарым окту $(0, +\infty)$ өзүнө камтыйт. $x = 0$ чекити $a \geq 0$ болгондо аныкталуу областына кирет жана $a < 0$ болгондо кирбейт. $(-\infty, 0)$ терс жарым ок бир учурларда аныкталуу областына кирет (мисалы, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}$ ж. б. у. с), ал эми башка учурда (мисалы, $y = \sqrt{x}, y = \sqrt[4]{x}$ ж. б. у. с) кирбейт.

2. Көрсөткүчтүү функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Аныкталуу областы бардык сан огу $(-\infty, +\infty)$.

3. Логарифмалык функция $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$. Аныкталуу областы - $(0, +\infty)$. Ондук логарифма $(a = 10)$ $y = \lg x$ менен белгиленет.

4. Тригонометриялык функциялар. $y = \cos x, y = \sin x$ функциялары $(-\infty, +\infty)$ аныкталуу областына ээ, $y = tgx$ – аныкталуу областы $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ дан сырткары бардык x ти камтыйт, мында k – каалагандай бүтүн сан, $y = ctgx$ – аныкталуу областы $x = k\pi$ ден башка бардык x ти камтыйт, мында k – каалагандай бүтүн сан.

5. Тескери тригонометриялык функциялар. $y = \arccos x, y = arc\sin x$ функциялары үчүн аныкталуу областы $[-1, +1]$, $y = \mathrm{arc}\,tgx, y = arcc\,tgx$ - $(-\infty, +\infty)$.

Эгерде $y = f(x)$ аналитикалык туюнтмасынын оң жагы чектүү сандын төрт арифметикалык амалдардын колдонулушунун жардамы менен негизги элементардык функциялардан жана функциядан алынган функциялардан түзүлсө, $y = f(x)$ функциясы элементардык деп аталат.

1. Эгерде $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ болсо, $f(0), f(-x), f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$ тапкыла.

Чыгаруу.

$$f(0) = \sqrt{1+0^2} = \sqrt{1} = 1;\ f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|};\ \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Эгерде $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$ болсо, $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ ти тапкыла.

Чыгаруу. $f(y)$ жана $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ ти табабыз:

$$f(y) = \lg\frac{1+y}{1-y};\ f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \lg\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}} = \lg\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}.$$

Андан ары $f(x) + f(y)$ ти табабыз:

$$f(x) + f(y) = \lg\frac{1+x}{1-x} + \lg\frac{1+y}{1-y} = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\right)$$
$$= \lg\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}.$$

$f(x)+f(y)$ жана $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ үчүн алынган туюнтмаларды салыштырып, чындыгында эле $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ экендигин көрөбүз.

3. $y=\sqrt{x^2+2}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу. x^2+2 туюнтмасы x тин каалагандай маанисинде оң, ошондуктан x тин каалагандай маанисинде квадраттык тамыр чыгарууга мүмкүн. Демек, берилген функциянын аныкталуу областы бардык $(-\infty,+\infty)$ сандык огу болот.

4. $y=\sqrt[4]{6x-x^2-5}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу. $6x-x^2-5\geq 0$ барабарсыздыгы аныкталышы керек экендиги айкын, аны өзгөртүп түзүп $(x-1)(x-5)\leq 0$ дү алабыз. Акыркы барабарсыздык аткарылат,

эгерде $\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x-5\leq 0 \end{cases}$ же $\begin{cases} x-1\leq 0, \\ x-5\geq 0. \end{cases}$

Барабарсыздыктардын биринчи системасынан $x\geq 1, x\leq 5$ экендигин алабыз, мындан $1\leq x\leq 5$.

Барабарсыздыктардын экинчи системасынан $x\leq 1$ жана $x\geq 5$, б.а. биргелешкен эмес системаны алабыз.

Демек, берилген функциянын аныкталуу областы $[1;5]$ кесиндиси болот.

5. $y=\frac{x}{x^2-3x-4}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу.

$x^2-3x-4\neq 0$, же $(x+1)(x-4)\neq 0$ болушу зарыл.

Мындан, $x\neq -1$ жана $x\neq 4$.

Демек, берилген функциянын аныкталуу областы $(-\infty,-1)(-1{,}4)$ $(4,\infty)$ интервалдардын жыйындысы (жалпылыгы) болот.

6. $y=\lg\sin(x-3)$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу. Логарифм мааниге ээ болуш үчүн $\sin(x-3)>0$ барабарсыздыгы аткарылыш керек. Синус I жана II чейректерде оң жана 2π мезгилине ээ, ошондуктан акыркы барабарсыздык

$2n\pi < x-3 < (2n+1)\pi,$ мында $n = 0, \pm1, \pm2, ...,$

Же

$2n\pi + 3 < x < (2n+1)\pi + 3,$ мында $n = 0, \pm1, \pm2, ...$

Демек, берилген функциянын аныкталуу областы $(2n\pi + 3, (2n+1)\pi + 3)$ мында $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ интервалдардын жыйындысы (жалпылыгы) болот.

7. $y = \arccos\frac{x-2}{2x}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу. Берилген функция $-1 \le \frac{x-2}{2x} \le 1$ болсо аныкталат. Барабарсыздыктын бардык бөлүктөрүн $2x$ ке көбөйтөбүз. $x > 0$ болгон учурда

$$-2x \le x-2 \le 2x,$$

$x < 0$ болсо, анда

$$-2x \ge x-2 \ge 2x.$$

Бул барабарсыздыктардын биринчисин төмөнкүдөй системалар түрүндө көрсөтүүгө болот

$$\begin{cases} -2x \le x-2 \\ x-2 \le 2x, \end{cases} \text{же} \begin{cases} -3x \le -2 \\ -x \le 2, \end{cases} \text{же} \begin{cases} x \ge \frac{2}{3}, \\ x \ge -2, \end{cases}$$

мындан $x \ge \frac{2}{3}$.

Экинчи барабарсыздыкты төмөнкүдөй системалар түрүндө көрсөтүүгө болот

$$\begin{cases} -2x \ge x-2 \\ x-2 \ge 2x, \end{cases} \text{же} \begin{cases} -3x \ge -2 \\ -x \ge 2, \end{cases} \text{же} \begin{cases} x \le \frac{2}{3}, \\ x \le -2, \end{cases}$$

Мындан $x \le -2$.

Демек, берилген функциянын аныкталуу областы $(-\infty, -2]$ $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right]$ чексиз интервалдардын жыйындысы болот.

8. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу. Ар бир кошулуучунун аныкталуу областын өзүнчө табабыз. Бул аныкталуу областардын жалпы бөлүгү берилген функциянын аныкталуу областы болот. Биринчи кошулуучу чексиз $[0, +\infty)$ интервалда аныкталган.Экинчи кошулуучу үчүн $x - 2 \neq 0$ же $x \neq 2$ барабарсыздыгынын аткарылышы зарыл. Демек, ал эки чексиз интервалдардын $(-\infty, 2)(2, +\infty)$ жыйындысында аныкталган. Үчүнчү кошулуучу үчүн $2x - 3 > 0$ барабарсыздыгынын аткарылышы же $x > \frac{3}{2}$ зарыл; анын аныкталуу областы – $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ чексиз интервал.

Жыйынтыктарды салыштырып, үч аныкталуу областын жалпы бөлүгү $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ $(2, +\infty)$ интервалдарынын жыйындысы болот.

9. Эки жуп функциянын көбөйтүндүсү жуп экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. $f(x)$ жана $\varphi(x)$ – жуп функциялар болсун. Анда $f(-x) = f(x)$ жана $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Мындан, эгерде $f(x)\varphi(x) = F(x)$, анда
$F(-x) = f(-x)\varphi(-x) = f(x)\varphi(x) = F(x)$.

Демек, $F(x) = f(x)\varphi(x)$ – жуп функция.

10. Эгерде $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$ болсо, $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ ти тапкыла.

11. Эгерде $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7$ болсо, $f(-2), f(-1), f(0), f(3)$ тапкыла.

12. Эгерде $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ болсо, $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x) + 1$, $f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$ тапкыла.

13. Эгерде $f(x) = \arccos(\lg x)$ болсо, $f\left(\frac{1}{10}\right), f(1), f(10)$ тапкыла.

14. Эгерде $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ болсо, $f(x)$ тапкыла.

15. Эгерде $f(x) = ax^2 + bx + c$ болсо, $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$ экендигин көрсөткүлө.

16. Эгерде $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ $(a > 0)$ болсо, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ экендигин көрсөткүлө.

Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын тапкыла:

17. $y = \sqrt[3]{x^4 + 5}$.

18. $y = \sqrt[4]{2 + x - x^2}$.

19. $y = \frac{1}{\sqrt{x^4 - 16}}$.

20. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

21. $y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$

22. $y = 2^{\frac{1}{1-x}}$.

23. $y = \sqrt{\sin x}$.

24. $y = \arcsin \frac{x}{4}$.

25. $y = x - \mathrm{arctg} x$.

26. $y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg(4 - x)$.

27. Так функциялардын көбөйтүндүсү жуп экендигин далилдегиле.

28. Жуп функциянын так функцияга көбөйтүндүсү так экендигин далилдегиле.

29. Төмөнкү функциялардын так же жуп экендигин экендигин түшүндүргүлө:

а) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

в) $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$,

б) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}$

г) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - 2x)^2}$.

30. Төмөнкү функциялардын кайсынысы мезгилдүү болоорун аныктагыла жана алардын мезгилин тапкыла:

а) $f(x) = 2\sin 4x$,

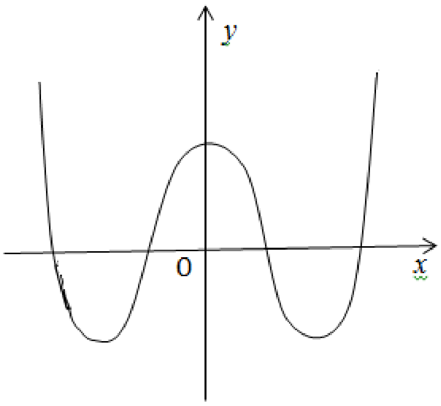
в) $f(x) = 3\cos^2 x$,

б) $f(x) = \sqrt{\mathrm{ctg} x}$,

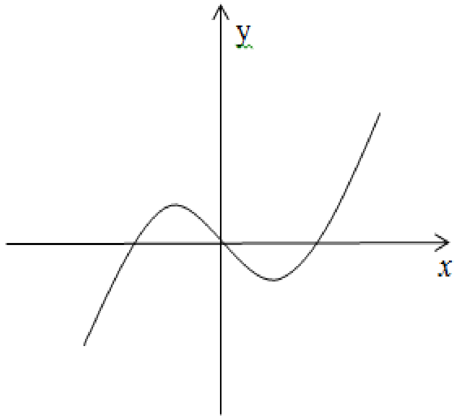
г) $f(x) = \sin\sqrt{x}$.

§ 1.2 ФУНКЦИЯЛАРДЫН ГРАФИКТЕРИ

1. Түздөн түз графиктерди түзүү. $M(x, f(x))$ чекиттеринин геометриялык орду $y = f(x)$ функциясынын графиги деп аталат. Жуп функциянын графиги $(f(x) = f(-x))$ ордината огуна салыштырмалуу симметриялуу (сүр. 1);

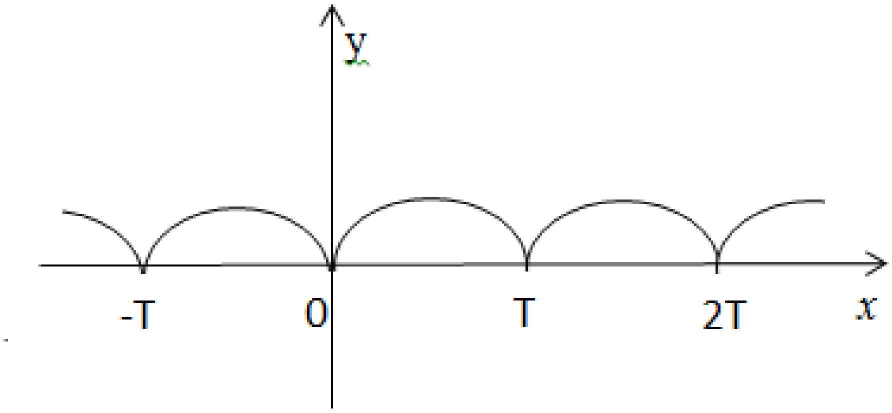


Сүр. 1



Сүр. 2

так функциянын графиги $(f(x) = -f(-x))$ координата башталышына салыштырмалуу симметриялуу экендигин белгилей кетели (сүр. 2); мезгили T болгон мезгилдүү функциянын графигин түзүүдө анын графигин каалагандай T узундуктагы кесиндиде түзүшөт, андан кийин мезгилдүүлүгүн пайдаланып, бүткүл сандык окто улантышат (сүр.3).



Сүр. 3

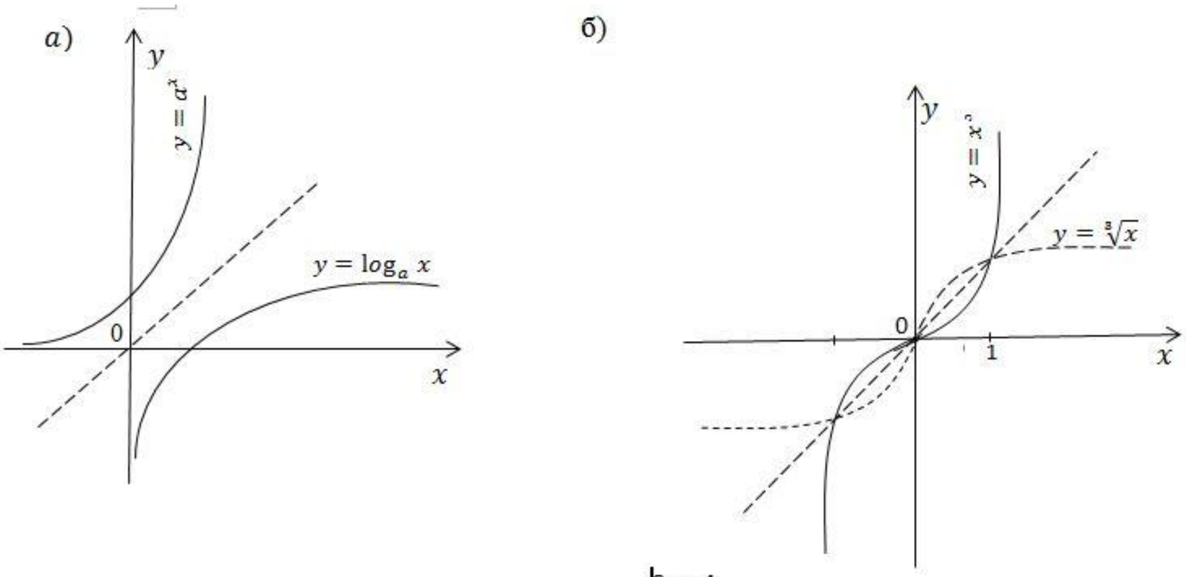
Эгерде ар бир a жана b маанилеринин түгөйлөрү үчүн $b = f(a)$ шарты канааттандырылып, $a = \varphi(b)$ шарты дагы аткарылса жана тескерисинче a жана b маанилеринин түгөйлөрү үчүн $a = \varphi(b)$ шарты канааттандырылып, $b = f(a)$ шарты дагы аткарылса,

эки $y = f(x)$ жана $y = \varphi(x)$ функциялары өз ара тескери деп аталат.Эки өз ара тескери функциялардын бирөөсү (калааганы) түз деп аталышы мүмкүн, анда экинчи башка функция биринчиге карата тескери деп аталат.

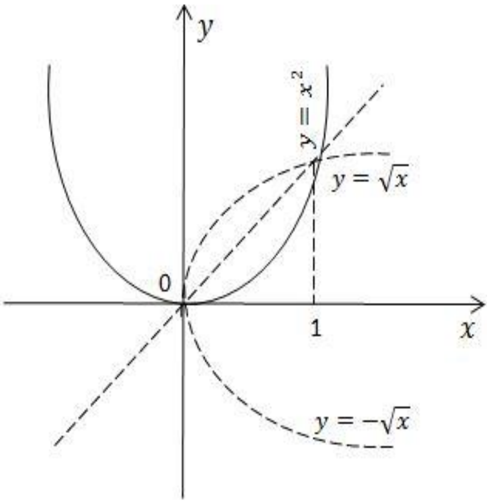
Мисалы,

$$y = a^x \text{ жана } y = \log_a x,\ y = \sin x \text{ жана } y = \mathrm{Arcsin}\, x,\ y = x^3$$
$$\text{жана } y = \sqrt[3]{x}$$

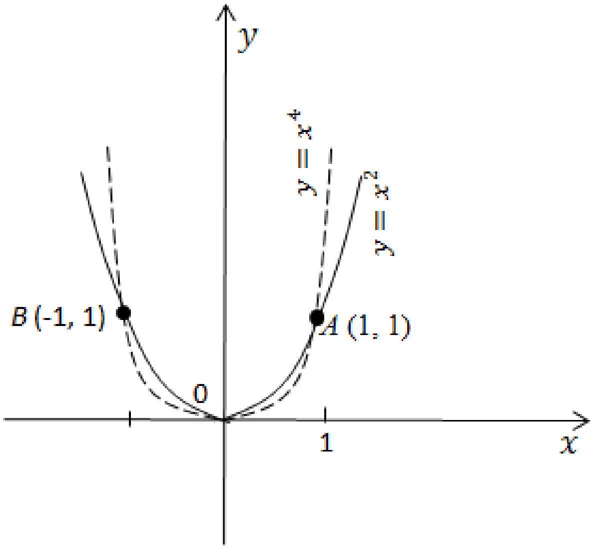
функциялары өз ара тескери болушат. Өз ара тескери функциялардын графиктери координаттык бурчтардын I жана III биссектрисаларына салыштырмалуу симметриялуу болушат (сүр. 4, 5, 6).



Сүр. 4



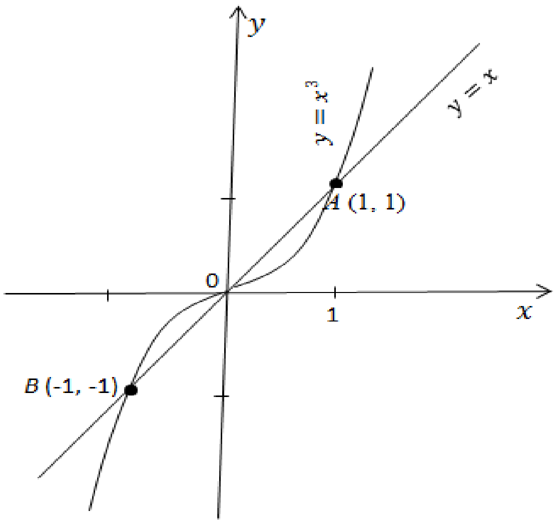
Сүр. 5



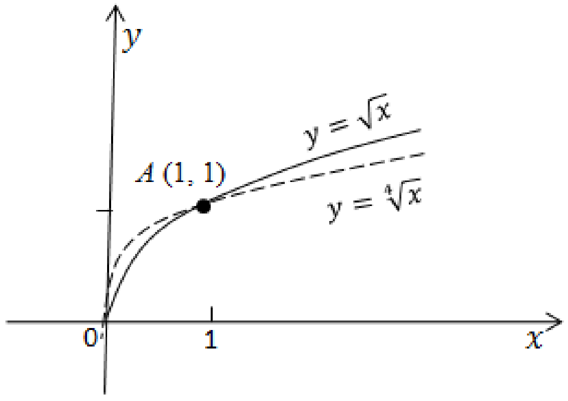
Сүр. 6

Түз функция монотондуу эмес болгон учурда, тескери функция бир маанилүү эмес. 4 жана 5, 6 сүреттөрдү салыштыргыла. Көп маанилүү функциялар үчүн көп маанилүү функциялардын бир маанилүү бутактары түшүнүгү киргизилет. Мисалы: 1) $y = \arcsin x$ функциясы $y = Arcsin\, x$ функциясынын бир маанилүү бутагы болот (**сүр**. 16.) $y = \arcsin x$ функциясы кара сызык менен бөлүнүп көрсөтүлгөн); 2) $y = x^2$ функциясына тескери функция эки бир маанилүү бутактарга ээ: $y = \sqrt{x}$ жана $y = -\sqrt{x}$ (сүр.5).

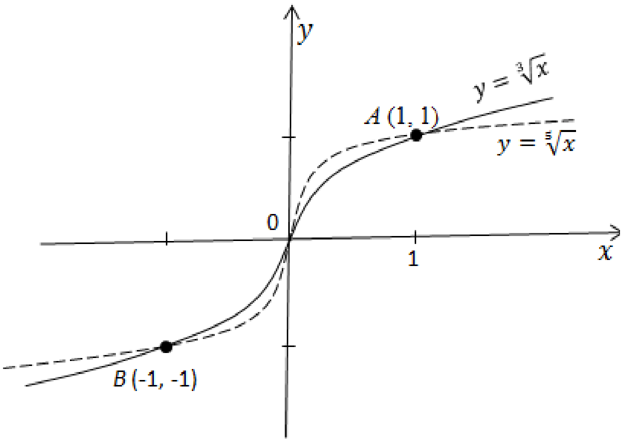
Математиканын мектеп курсунан функциялардын графиктерин түзүү үчүн негизги элементардык функциялардын графиктеринин жайгашуусун жана жалпы түрүн билүү маанилүү экендиги белгилүү. Даражалуу функциялардын графиктеринин мисалдары a көрсөткүчүнүн бир нече маанилеринде сүр. 6, 7, 8, 9, 10 көрсөтүлгөн. Сүр. 11, 12, 13, 14 көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялардын графиктеринин түрү көрсөтулгөн. Тригонометриялык жана тескери тригонометриялык функциялардын графиктери сүр. 15, 16, 17, 18 көрсөтүлгөн.



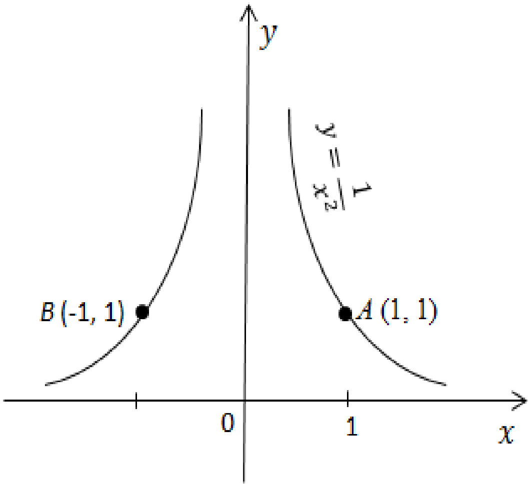
Сүр. 7



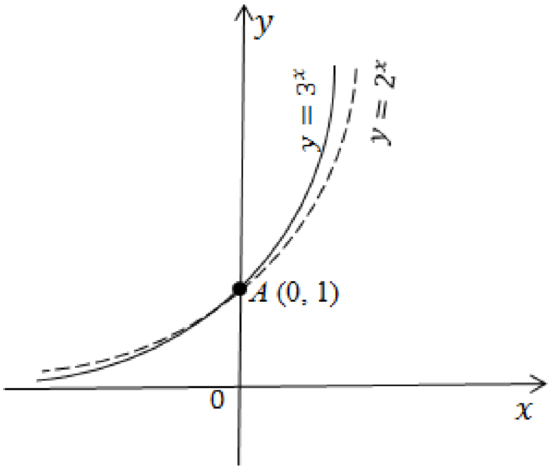
Сүр. 8



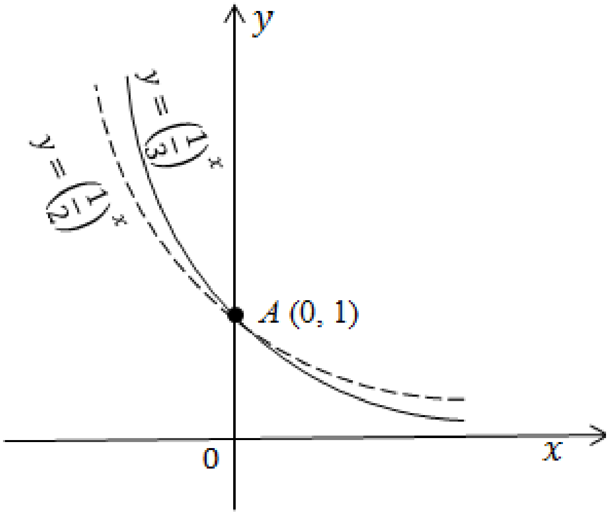
Сур. 9



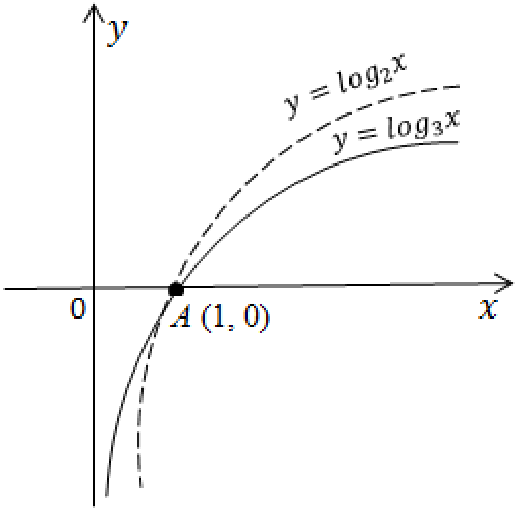
Сур. 10



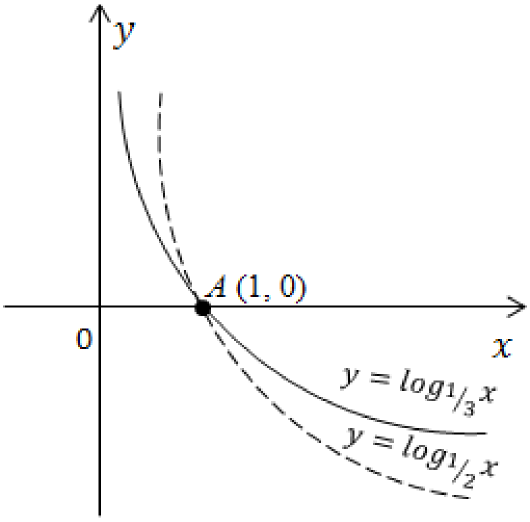
Сур. 11



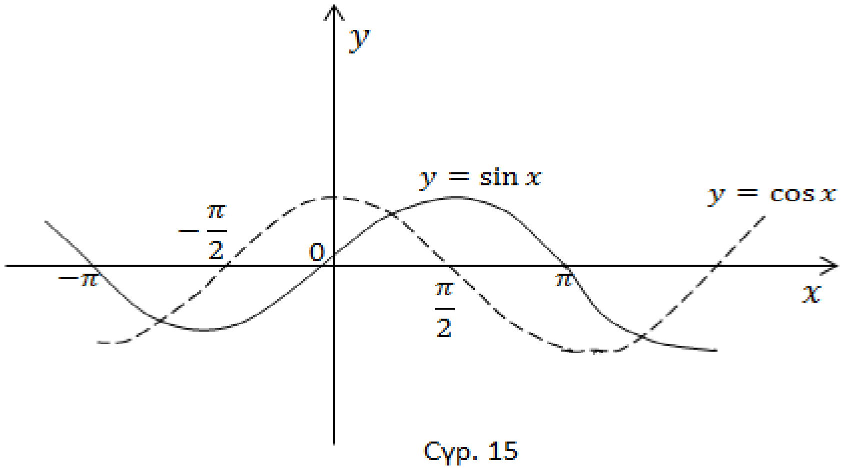
Сур. 12



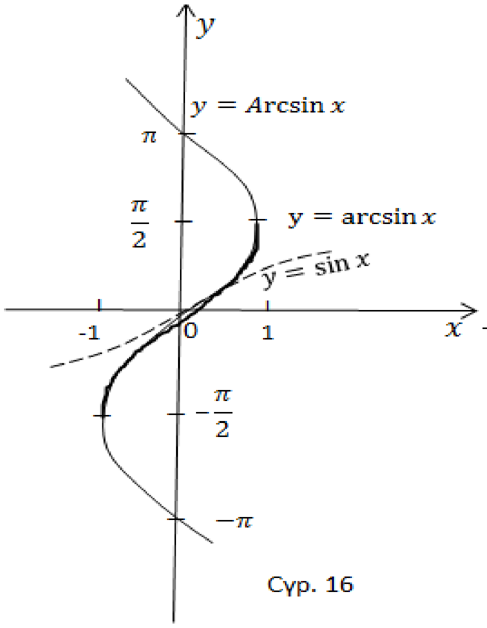
Сур. 13



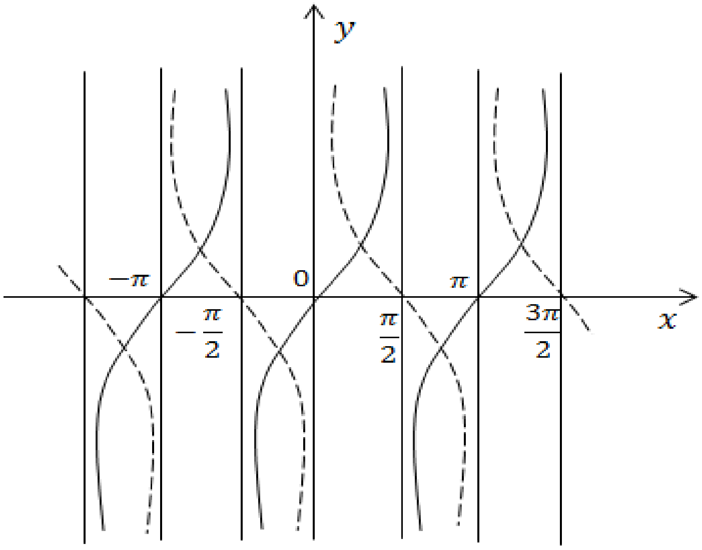
Сур. 14



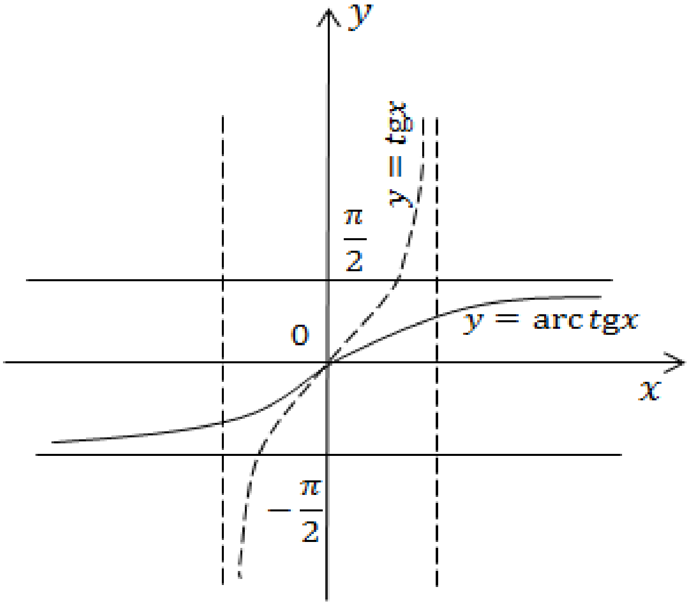
Сур. 15



Сур. 16



Сур. 17



Сур. 18

Дифференциалдык эсептөөлөрдү колдонуунун жардамы менен функциялардын графиктерин түзүүнүн жалпы схемасы кийинки 2-бапта берилет. Азыр түздөн-түз графиктерди түзүүлөргө жана аналитикалык геометриянын ыкмаларын колдонууга негизделген графиктер каралат (параллель котоpуу, созуу же кысуу).

Графиктерди түздөн-түз түзүүгө функциялардын аныктамасынынын натыйжасында түздөн-түз келип чыккан, мектептен белгилүү болгон "чекиттер боюнча" графикти түзүү ыкмасы, негизги элементардык функциялардын графиктерин колдонуу, ошол же башка графиктин симметриясын же анын мезгилдүүлүгүн колдонуу (эгерде ошолор бар болсо), берилген функцияларды графикалык кошуу жана башка ыкмалар колдонулат. Албетте, аналитикалык геометрия курсунан белгилүү болгон биринчи жана экинчи тартиптеги сызыктар жөнүндөгү маалыматтарды да колдонуу керек.

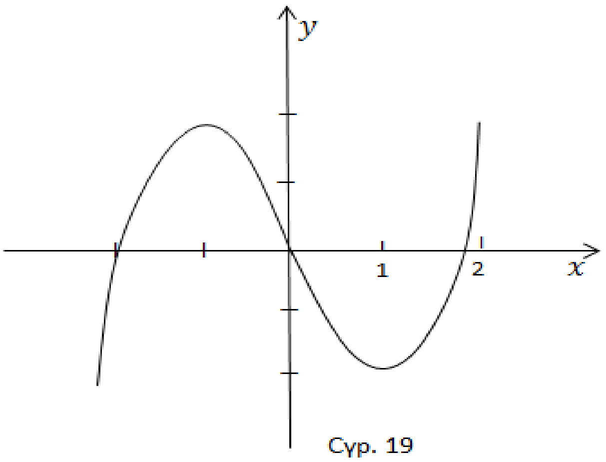
31. $y = x^3 - 3x$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. Бул функция так функция экендигин байкайбыз, анда графиги координата башталышына салыштырмалуу симметриялуу. Аргумент x тин терс эмес маанилери менен чектелип, x ке $h = \frac{1}{2}$ интервалы аркылуу маанилердин катарын берип, функциянын маанилеринин таблицасын түзөбүз;

Таблица 1

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
y	0	$-1\frac{3}{8}$	-2	$-1\frac{1}{8}$	2	$8\frac{1}{8}$	18

Ушул берилгендер менен графиктин бир нгече чекиттерин түзөбүз ($x = 2$ чейин); аларды жылмакай сызыктар менен туташтырып, 0 дөн 2 ге чейинки кесиндиде графиктин түрүн алабыз. 1-таблицадан $x = 2$ ден кийин функция абдан тез өсөөрү көрүнүп турат. Демек, анын графиги өйдө көздөй кетет. 0 башталышына салыштырмалуу симметрияны колдонуп, x тин терс маанилери үчүн график түзөбүз (сүр.19).



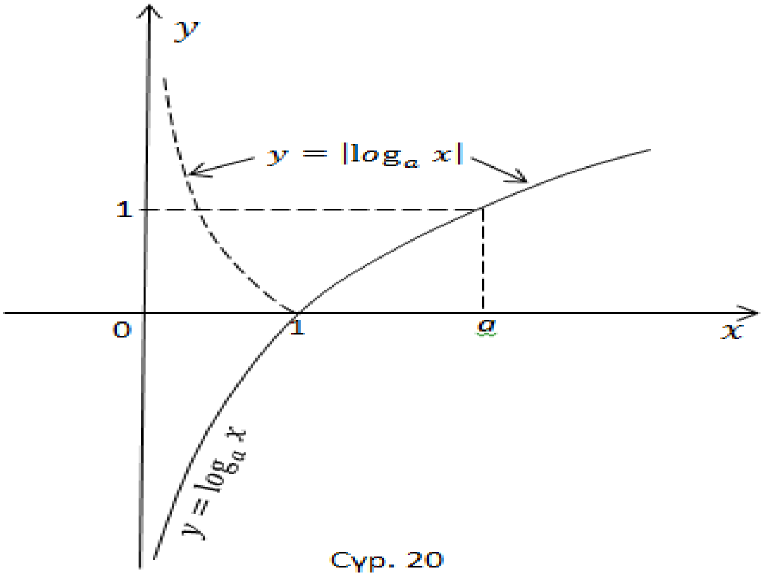
Сүр. 19

32. $y = f(x)$ функциясынын белгилүү графигинен $y = |f(x)|$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. Модулдун аныктамасы боюнча

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{эгерде } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{эгерде } f(x) < 0; \end{cases}$$

ошондуктан $f(x) \geq 0$ болгондо, б.а. $y = f(x)$ функциясынын графиги Ox огунун жогору жагында жатат, $y = |f(x)|$ функциясынын графиги $y = f(x)$ функциясынын графиги менен дал келет. $(x, -y)$ жана (x, y) чекиттери Ox огуна салыштырмалуу симметриялуу жайгащкан, анда $|f(x)|$ функциясынын графигин алуу үчүн $f(x) < 0$ болгон учурда $y = f(x)$ функциясынын графигин Ox огуна салыштырмалуу симметриялуу чагылтуу керек же аны бул октун айланысында 180° ка буруу керек. Мисал катары 20-сүрөттө (сүр.20) $y = \log_a x$ графиги боюнча $y = |\log_a x|$ функциясынын графигин түзүү көрсөтүлгөн.



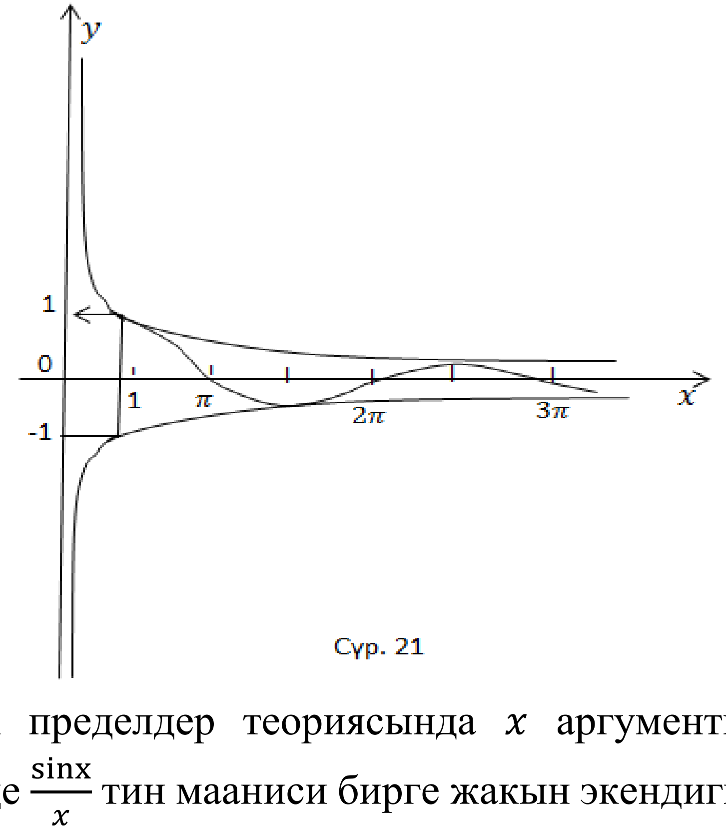
Сүр. 20

33. $y = \frac{\sin x}{x}$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. Функция жуп болгондуктан терс эмес x үчүн анын графигин түзүү жетиштүү, графиктин калган бөлүгү Oy огуна салыштырмалуу симметирлөөдөн алынат.

Бул учурда кокустан тандалган чекиттерди түзүүгө ашыгуу максатсыз. Синусоиданын термелүү мүнөзүн колдонуу керек. $-1 \leq \sin x \leq 1$ болгондуктан, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sinx}}{x} \leq \frac{1}{x}$ келип чыгат. Демек, берилген функциянын графиги бардык убакта $y = -\frac{1}{x}$ жана $y = \frac{1}{x}$ графиктеринин арасында камалган, синусоида -1ден +1 ге чейин термелет, анда x тин чоңоюшу менен $y = \frac{\text{sinx}}{x}$ функциясынын графиги $-\frac{1}{x}$ жана $\frac{1}{x}$ графиктеринин ортосунда термелет. Бул $x > 0$ болгондо изделүүчү графиктин жалпы түрүн чийүүгө мүмкүндүк берет (сүр.21).

Басандатылган термелүүнүн сүрөтү алынган.



Сүр. 21

Кийинчерээк пределдер теориясында x аргументинин кичине маанилеринде $\frac{\text{sinx}}{x}$ тин мааниси бирге жакын экендиги көрсөтүлөт. Бул (сүр.21) стрелка менен чагылдырылган. Сүрөттү такташ үчүн $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0,1,2, \ldots)$ болгондо изделүүчү график $y = \frac{1}{x}$

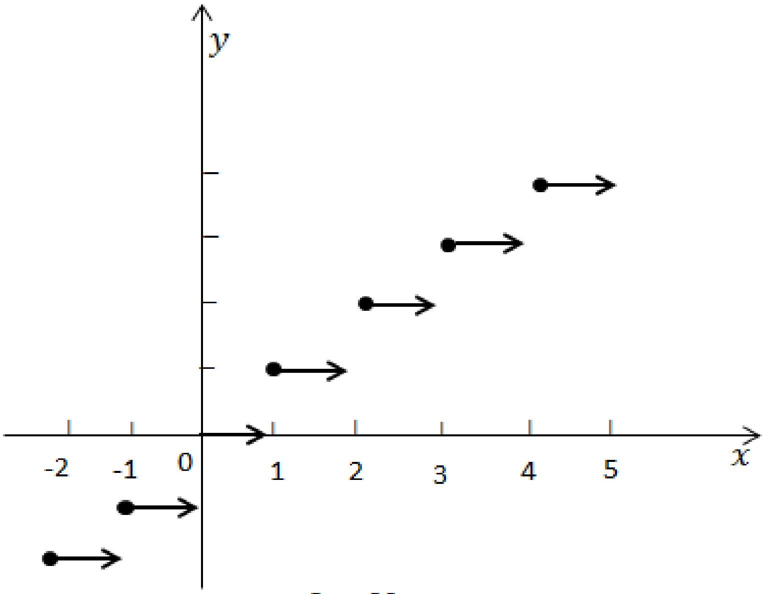
функциясынын графигине тийишет, ал эми $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ болгондо - $y = -\frac{1}{x}$ функциясынын графигине, $x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ чекиттеринде Ox огун кесип өтөт.

34. $[x]$ символу менен x санынын бүтүн бөлүгү, б.а. x тан жогору болбогон эң чоң бүтүн сан. $y = [x]$ функциясынын графигин түзөбүз.

Чыгаруу. Бүтүн бөлүктүн аныктамасы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 4, & \text{эгерде } x \text{ чектеринде өзгөрүлсө } 4 \le x < 5 \\ 3 & \gg \qquad \gg \qquad \gg \qquad 3 \le x < 4 \\ 2 & \gg \qquad \gg \qquad \gg \qquad 2 \le x < 3 \\ 1 & \gg \qquad \gg \qquad \gg \qquad 1 \le x < 2 \\ 0 & \gg \qquad \gg \qquad \gg \qquad 0 \le x < 1 \\ -1 & \gg \qquad \gg \qquad \gg \qquad -1 \le x < 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases}$$

Ошондуктан ар бир бүтүн сан аралыкта $y = [x]$ функциясынын графиги Ox огуна параллел түз сызыктын кесиндиси менен сүрөттөлөт жана кесиндинин сол учу графикке таандык, оң учу жок. Сүр.22 акыркы абал стрелка менен белгиленген.



Сүр. 22

Каралып жаткан функциянын графиги үзгүлтүксүз сызыкты бербейт, ар бир бүтүн сандык чекитте үзгүлтүккө ээ болот (§1.7 кара).

Функциялардын графиктерин түзгүлө:

35. $a)\ y = 2x - x^3$, б) $y = x^4 - 3x^2 + 1$, в) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

36. $a)\ y = |x^2 - 1|$, б) $y = \lg|x|$.

37. $y = a^{-x}\cos x$ жана $y = a^{-x}\sin x$ $\quad x \geq 0\ \ (a > 1)$.

Көрсөтмө. 33-мисалдагы ыкманы колдонуу.

38. $y = \frac{|x-1|}{x-1}(x+3)$ $\quad x \neq 1$ жана $y = 1$ $\quad x = 1$ болгондо

Көрсөтмө. $x > 1$ жана $x < 1$ болгондо графиктин бутактарын өзүнчө изилдөө.

39. $y = x - [x]$ (x санынын бөлчөк үлүшү).

40. $y = 1 + x + \sin x$.

Көрсөтмө. $y = 1 + x$ жана $y = \sin x$ функцияларынын графиктерин түзүп, андан кийин аларды графикалык кошуу керек.

2. Параллель көчүрүү. Эгерде $y = f(x)$ функциясынын графиги белгилүү болсо

$y = f(x - a) - b$ (a,b – каалагандай сандар) (1)

түрдөгү функциянын графигин түзүүнүн ыкмасын көрсөтөбүз.

(1) теңдемесин $y - b = f(x - a)$ түрүндө жазабыз жана координата окторун параллель көчүрүп өзгөртүп түзүү жүргүзөбүз:

$$X = x - a,\ \ Y = y - b.$$

Жаңы системанын башталышы $O_1(a, b)$ чекитинде жайгашат. XO_1Y системасына салыштырмалуу (1) теңдемеси $Y = f(X)$ түрүндө болот.

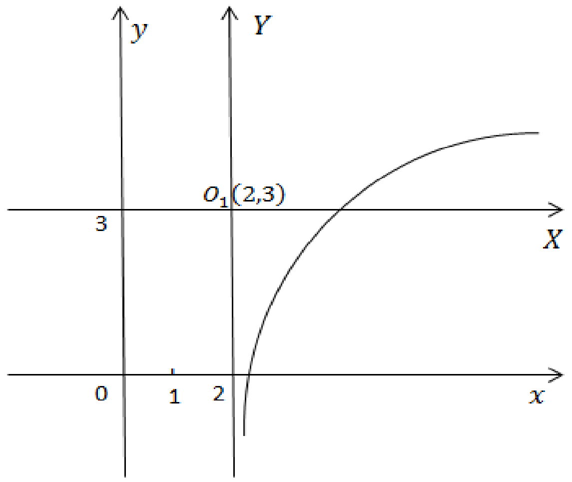
Шарт боюнча бул функциянын графиги белгилүү.

Ошентип, (1) түрүндөгү функциянын графигин түзүүнүн ыкмасы төмөнкүгө келтирилет: $O(a, b)$ чекитине XO_1Y жардамчы координаталар системасынын башталышын жайгаштырабыз, бул системага салыштырмалуу $Y = f(X)$ функциясынын графигин түзөбүз. xOy системасында түзүлгөн ийри (1) теңдемеси менен сүрөттөлөт.

41. $y = \lg(x-2)+3$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. Координаталар окторунун параллель көчүрүүсүнүн формулалары $X = x-2,\quad Y = y-3$ түрүндө жазылат. Жаңы башталыштын координаталары $O_1(2,3)$.

Жаңы координата системасында $Y = \lg X$ функциясынын графиги түзүлөт. xOy системасына салыштырмалуу бул график $y = \lg(x-2)+3$ функциясын сүрөттөйт (сүр.23).



Сүр. 23

Функциялардын графиктерин түзгүлө:

42. $y = (x-2)^3+5$.

43. $y = 2+e^{x-3}$.

44. $y = 2+tgx$.

45. $y = 1+\arcsin(x-3)$.

3. Кысуу жана созуу. Эгерде $y = f(x)$ функциясынын графиги белгилүү болсо

$$y = \beta f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \tag{2}$$

түрүндөгү функциянын графигин түзүүнүн ыкмасын көрсөтөбүз. функциясын $\frac{y}{\beta} = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ түрүндө жазабыз жана өзгөрмөлөрдү алмаштырууну жүргүзөбүз;

$$Y = \frac{y}{\beta},\ X = \frac{x}{\alpha},\ \text{же}$$

$$x = \alpha X, y = \beta Y. \tag{3}$$

Жаңы өзгөрүлмөлөрдө теңдеме төмөнкүдөй түргө ээ

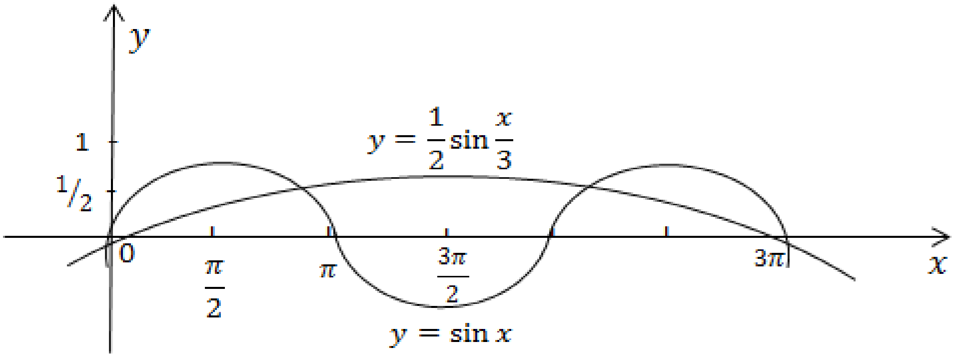
$$Y = f(X).$$

Шарт боюнча бул функциянын графиги белгилүү. x жана y эски өзгөрүлмөлөргө өтүүдө кантип деформацияланганлыгын графикти түзүп көрөбүз. (3) барабардыгын колдонуп

координатасы (X_0, Y_0) менен каалагандай чекитке $x_0 = \alpha X_0$, $y_0 = \beta Y_0$ чекитти дал келтирип коюуга болот, б.а. абсцисса огу боюнча координатасы α жолу, ал эми ордината огу боюнча координатасы β жолу чоңойтулган чекит. $Y = f(X)$ бардык ийрилерге тиешелүү, анда ал абсцисса огу боюнча α жолу жана ордината огу боюнча β жолу созулуш керек (Эгерде $\alpha < 1$ же $\beta < 1$ болсо, анда созулуу жөнүндө эмес дал келүүчү окту бойлото кысылуу жөнүндө сөз кылуу керек).

46. Графигин түзүү $y = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$.

Чыгаруу. $\alpha = 3$ жана $\beta = \frac{1}{2}$; берилген функциянын графигин түзүү үчүн $y = \sin x$ функциясынын графигин абсцисса огу боюнча үч эсе созуу керек жана ордината огу боюнча эки эсе кысуу керек. $y = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$ функциясынын графиги (сүр.24) түзүлгөн.



Сүр. 24

$y = \sin x$ функциясынын кошуна нөлдөрүнүн арасындагы аралык π , ал эми

$y = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$ функциясынын кошуна нөлдөрүнүн арасындагы аралык 3π ге барабар; $y = \sin x$ функциясынын максималдуу мааниси 1ге барабар, ал эми

$y = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$ функциясынын максималдуу мааниси $\frac{1}{2}$ ге барабар.

Функциялардын графиктерин түзгүлө:

47. $y = \frac{1}{3}x^3$.

48. $y = 3\cos\frac{x}{2}$.

49. $y = \frac{1}{2}\text{tg}\frac{x}{4}$.

50. $y = lg3x$.

4. Көбүрөөк жалпы учур. (1) жана (2) түрүндөгү функциялардын графиктерин түзүүдөгү ыкмаларды чогултуп, төмөнкүдөй түрдөгү функциянын графигин түзүүгө болот

$$y = \beta f\left(\frac{x-a}{\alpha}\right) + b, \qquad (4)$$

мында $\alpha > 0, \beta > 0$, a жана b – каалагандай сандар, $y = f(x)$ функциясынын графиги белгилүү деп эсептелет. Алгач $y = f(x)$ функциясынын графиги боюнча $y_1 = f_1(x) = \beta f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ (3-п) функциясынын графиги түзүлөт. Андан ары, $y_1 = f_1(x)$ функциясынын графиги боюнча $y_2 = f_1(x-a) + b$ (2-п.) функциясынын графиги түзүлөт.

Жыйынтыгында алынган график (4) түрүндөгү функцияга жооп бере тургандыгын текшеребиз. $y_2 = f_1(x-a) + b$ формуласына $f_1(x) = \beta f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ туюнтмасын коюп, төмөнкүнү алабыз

$$y_2 = f_1(x-a) + b = \beta f\left(\frac{x-a}{\alpha}\right) + b.$$

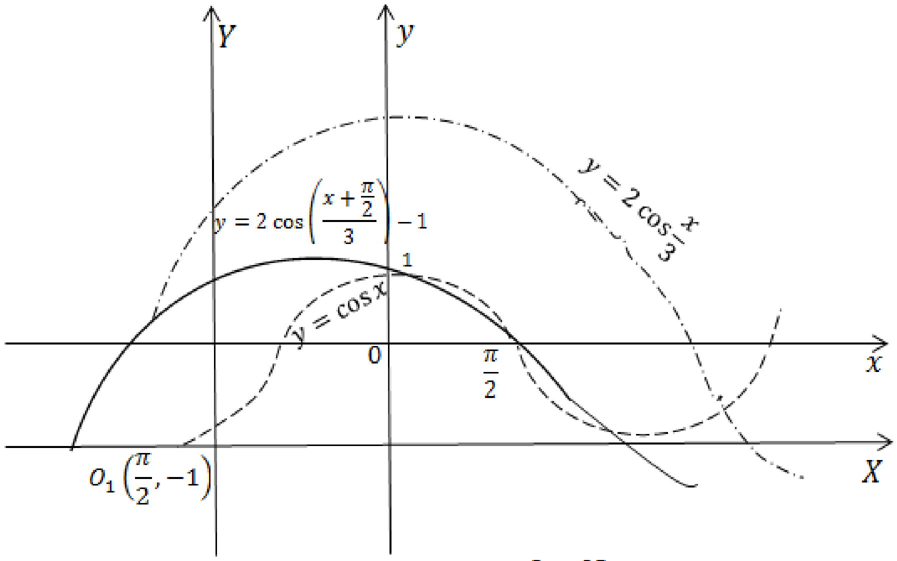
51. $y = 2\left[\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] - 1$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. Функцияны (4) түрүнө өзгөртүп түзөбүз:

$$y = 2\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{3}\right) - 1;$$

бул учурда $\alpha = 3,\ \beta = 2,\ a = -\frac{\pi}{2},\ b = -1,\ f(x) = \cos x$ экендигин алабыз.

Графикти түзүүнүн удаалаш этаптары (сүр. 25) сүрөттөлгөн.



Сүр. 25

$y = \cos x$ функциясынын графигин Ox огу боюнча үч эсе жана Oy огу боюнча эки эсе созуп, $y_1 = f_1(x) = 2\cos\frac{x}{3}$ функциясынын графигин алабыз. Андан кийин XO_1Y координаталар системасында башталышы $O_1\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ чекитинде $Y = 2\cos\frac{X}{3}$ функциясынын графигин түзөбүз, ал xOy системасында
$y = 2\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{3}\right) - 1$ функциясынын да графиги болот.

Функциялардын графиктерин түзгүлө:

52. $y = \frac{1}{2}e^{x+1} + 3.$

53. $y = \left(\lg\sqrt{x-3} - 1\right).$

54. $y = 2 + 3\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$

55. $y = -\frac{2}{(x+2)^3} + 5.$

($y = -\frac{1}{x^3}$ функциясынын графигин белгилүү деп эсептеп**).**

56. $y = \arcsin\frac{2x-1}{3}.$

57. $y = 1 + 2\mathrm{arctg}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

($y = \mathrm{arctg}(-x)$ функциясынын графигин белгилүү деп эсептеп).

§ 1.3. САНДЫК УДААЛАШТЫК ЖАНА АНЫН ПРЕДЕЛИ

1. Аныктамалар. Аныкталган тартипте номерленген

$$a_1, a_2 \dots, a_n, \dots,$$

сандардын жыйындысы сандык удаалаштык деп аталат. Удаалаштыкты бүтүн сандуу аргументтин функциясы катары көрсөтсө да болот: ар бир бүтүн оң $x = n$ мааниге $f(x) = f(n) = a_n$ функциянын аныкталган мааниси жооп берет;

a_n сандык удаалаштыктын жалпы мүчөсү деп аталат.

Эгерде удаалаштыктын ар бир кийинки мүчөсү өзүнөн мурдагысынан чоң болсо, сандык удаалаштык монотондуу өсүүчү деп аталат. Мисалы,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Эгерде удаалаштыктын ар бир кийинки мүчөсү өзүнөн мурдагысынан кичине болсо, сандык удаалаштык монотондуу кемүүчү деп аталат. Мисалы,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots .$$

Эгерде каалагандай n үчүн $a_n \le M$ болгон M саны жашаса, сандык удаалаштык жогору жагынан чектелген деп аталат.
Ошентип, жалпы мүчөсү $a_n = \frac{n}{n+1}$ удаалаштык жогору жагынан чектелген, анткени анын бардык мүчөлөрү, мисалы 1 ден кичине.

Эгерде каалагандай n үчүн $a_n \ge N$ болуп N саны жашаса, сандык удаалаштык төмөн жагынан чектелген деп аталат.
Мисалы,

$$a_n = \frac{1}{n} > 0.$$

Эгерде сандык удаалаштык жогору жана төмөн жагынан чектелген болсо, анда чектелген сандык удаалаштык деп аталат. Анда каалагандай n үчүн
$M > 0$ саны жашайт

$$-M \le a_n \le M, \text{ б.а. } |a_n| \le M.$$

Мисалы, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ удаалаштыгы чектелген, анткени $|a_n| \leq 1$.

2. Пределдер. Эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн $N = N(\varepsilon)$ саны жашап, $n > N(\varepsilon)$ болгондо $|a_n - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, A саны удаалаштыктын предели деп аталат.

Эгерде A удаалаштыктын предели болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ деп жазылат.

Сандык удаалаштык бир пределден ашык пределге ээ боло албайт. Пределге ээ болгон удаалаштык жыйналуучу деп аталат. Жыйналуучу удаалаштыктар үчүн пределдин аныктамасынан келип чыгуучу теоремалар орун алат:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\,; \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n\,; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},\ \text{эгерде } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0. \tag{3}$$

58. 1, 4, 9, 16, 25, ... удаалаштыктын жалпы мүчөсүн табуу.

Чыгаруу. $a_1 = 1 = 1^2$, $a_2 = 4 = 2^2$, $a_3 = 9 = 3^2$, $a_4 = 16 = 4^2$,

$a_5 = 25 = 5^2$ ж.б.у.с. экендиги көрүнүп турат. Демек, $a_n = n^2$.

59. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ удаалаштыктын жалпы мүчөсүн табуу.

Чыгаруу. $|a_1| = |1| = \frac{1}{1}$, $|a_2| = \left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$,

$|a_3| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} = \frac{1}{2\cdot 2+1}$, $|a_4| = \left|-\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7} = \frac{1}{2\cdot 3+1}$ ж.б.у.с.

Демек,

$$|a_n| = \frac{1}{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-2+1} = \frac{1}{2n-1},$$

мында $a_1 > 0, a_2 < 0,\ a_3 > 0, a_4 < 0$ ж.б.

Ошентип, алабыз:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

60. Удаалаштыктын пределинин аныктамасын колдонуп жалпы мүчөсү $a_n = \frac{1}{n^2}$ болгон удаалаштыктын предели нөлгө барабар экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. Удаалаштыктын мүчөлөрүнүн катарын жазабыз:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \ldots$$

жана $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Берилген удаалаштыктын төртүнчүсүнөн баштап бардык мүчөлөрү үчүн төмөнкү барабарсыздык аткарылат

$$|a_n - 0| = |a_n| < \frac{1}{10}.$$

Чындыгында,

$$\left|\frac{1}{16} - 0\right| = \left|\frac{1}{16}\right| = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}, \quad \left|\frac{1}{25} - 0\right| = \left|\frac{1}{25}\right| = \frac{1}{25} < \frac{1}{10} \text{ ж.б.}$$

Бул учурда N (удаалаштыктын пределинин аныктамасын карагыла)ди үчкө барабар деп алсак болот (же үчтөн чоң болгон каалаган сан), ошентип эгерде удаалаштыктын мүчөсүнүн тартибинин номери n үчтөн чоң болсо, анда $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{1}{10}$ барабарсыздык аткарылат.

Эми $\varepsilon = \frac{1}{40}$ койобуз. Удаалаштыктын бардык мүчөлөрү жетинчисинен баштап

$$|a_n - 0| = |a_n| < \frac{1}{40};$$

болоору түшүнүктүү, азыр N үчүн алтыны кабыл алса болот (же алтыдан чоң болгон каалагандай сан). Эгерде $\varepsilon = \frac{1}{100}$ болсо, анда $N \geq 10$ ж.б.

Азыркы учурда N саны үчүн ε көз карандылы жалпы туюнтманы табууга болот. Берилген удаалаштыктын жалпы мүчөсү $a_n = \frac{1}{n^2}$. ε эркин оң санын берип, пределдин аныктамасына ылайыкташтырыш керек $n > N$ болгондо $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$ же $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылышын талап кылат. Барабарсыздыкты n ге салыштырмалуу чыгарып, $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ алабыз.

Ошондо N үчүн $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ санын кабыл алууга мүмкүн (же каалагандай чоң сан). Ошентип, каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ жашап , $n > N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ болгондо $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат, ал эми бул удаалащтыктын предели нөл болоорун далилдейт.

Бул маселеде удаалаштыктын мүчөлөрү өзүнүн пределине жакындаарын, ал пределден оң жактан чоң болоорун белгилейбиз.

61. Удаалаштыктын пределинин аныктамасын колдонуп жалпы мүчөсү $a_n = 2 - \frac{1}{3^n}$ болгон удаалаштыктын предели экиге барабар экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. Удаалаштыктын мүчөлөрүнүн катарын жазабыз:

$$1\frac{2}{3}, 1\frac{8}{9}, 1\frac{26}{27}, 1\frac{80}{81}, \ldots$$

Мурдагы маселедей ой жүгүртүп,

$$\text{эгерде } \varepsilon = \frac{1}{10} \text{ болсо, анда } N \geq 2;$$
$$\text{эгерде } \varepsilon = \frac{1}{100} \text{ болсо, анда } N \geq 4; \text{ ж.б.}$$

болоорун көрсөтсө болот. N саны үчүн ε дон көз каранды болгон жалпы туюнтманы табабыз. Берилген удаалаштыктын жалпы мүчөсү $a_n = 2 - \frac{1}{3^n}$. Каалагандай $n > N$ үчүн $\left|2 - \frac{1}{3^n} - 2\right| < \varepsilon$ же $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ барабарсыздыгына ээ болобуз, аны n ге салыштырмалуу чыгарып, $n > -\frac{\lg\varepsilon}{lg3}$ алабыз.

Ошондо N үчүн $-\frac{\lg\varepsilon}{lg3}$ санын алууга мүмкүн (же каалагандай чоңураак сан). Ошентип, каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн $N = -\frac{\lg\varepsilon}{lg3}$ жашап , $n > N = -\frac{\lg\varepsilon}{lg3}$ болгондо $\left|2 - \frac{1}{3^n} - 2\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат, ал эми бул удаалащтыктын предели эки саны болоорун далилдейт.

Бул маселеде удаалаштыктын мүчөлөрү өзүнүн пределине жакындаарын, ал пределден сол жактан кичине болоорун белгилейбиз.

62. Удаалаштыктын пределинин аныктамасын колдонуп жалпы мүчөсү $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ болгон удаалаштыктын предели нөлгө барабар экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. Удаалаштыктын мүчөлөрүнүн катарын жазабыз:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$$

N саны үчүн ε дон көз каранды болгон жалпы туюнтманы табабыз. Каалагандай $n > N$ үчүн $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| < \varepsilon$ же $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ээ болобуз. Барабарсыздыкты n ге салыштырмалуу чыгарып, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ алабыз. Ошентип N үчүн $\frac{1}{\varepsilon}$ санын кабыл алууга мүмкүн (же каалагандай чоңураак сан).

Ошентип, каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн $N = \frac{1}{\varepsilon}$ жашап , $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$ болгондо $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат. Демек, бул берилген удаалащтыктын предели нөл саны болот.

Берилген маселеде удаалаштыктын мүчөлөрү кезектешип пределден чоң, кичине болуп, өзүнүн пределине жакындашышты.

63. $a_n = \frac{5n^2+3n+2}{2n^2-n+1}$ жалпы мүчөсү менен берилген удаалаштыктын пределин тапкыла.

Чыгаруу. Бул маселеде $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n+2}{2n^2-n+1}$ табууга туура келет. $\frac{5n^2+3n+2}{2n^2-n+1}$ туюнтманын алымын жана бөлүмүн мүчөлөп n^2 бөлүп , өзгөртүп түзөбүз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n+2}{2n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Эми удаалаштыктын жалпы мүчөсүн, $a_n = 5$, $a_n = \frac{3}{n}$, $a_n = \frac{2}{n^2}$, $a_n = 2$, $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ удаалаштыктын жалпы мүчөлөрүн кошуудан, кемитүүдөн жана бөлүүдөн алынган жыйынтык деп эсептөөгө болот.

$a_n = \frac{3}{n}$, $a_n = \frac{2}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ удаалаштыктарынын пределдери нөлгө барабар, ал эми $a_n = 5$ жана $a_n = 2$ удаалаштыктарынын пределдери 5 жана 2 ге барабар, б.а.бардык бул удаалаштыктар жыйналуучу, ошондуктан: 1) бул параграфтагы (1) формула боюнча

$$\lim_{n\to\infty}\left(5 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} = 5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 2 \neq 0;$$

2) бул параграфтагы (3) формула боюнча

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{5}{2}.$$

Демек, берилген удаалаштыктын предели $\frac{5}{2}$.

64. $a_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!}$ жалпы мүчөсү менен берилген удаалаштыктын пределин тапкыла.

Чыгаруу. $n!$ Символу менен (“эн факториал” деп окулат)натуралдык сандардын катарынын биринчи сандарынын n көбөйтүндүсүн кыскача белгилешет;

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n,$$

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1),$$

$$(n+1)! = n!\,(n+1).$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\,(n+1) - n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\,(n+1-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Төмөнкү мисалдарда удаалаштыктын жалпы мүчөсүн табып, алардын чектелгендигин далилдегиле:

65. $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots,$

66. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots,$

67. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots.$

Удаалаштыктын пределинин аныктамасын колдонуп, төмөнкү барабардыктарды далилдегиле:

68. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} = 0.$

69. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$

70. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} = 0.$

71. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-1}{n+1} = 5.$

72. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{1-n^2} = 0.$

73. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right] = 1.$

Төмөнкү мисалдарда удаалаштыктардын пределин тапкыла:

74. $a_n = \frac{3n-1}{5n+1}.$

75. $a_n = \frac{n^3-100n^2+1}{100n^3+15n}.$

76. $a_n = \frac{n^3-5n+1}{3n+7}$

77. $a_n = \frac{2n^2-n-3}{n^3-8n+5}.$

78. $a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}.$

79. $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}.$

80. $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}.$

81. $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}.$

82. $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}.$

83. $a_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}.$

84. $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$

§ 1.4. ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ

1. Функциянын пределинин аныктамасы. Эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн $\delta(\varepsilon) > 0$ саны жашап, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ болгондо $|f(x) - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса A саны x aга умтулгандагы $y = f(x)$ функциясынын предели деп аталат. Аны төмөнкүдөй жазышат

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Ушуга окшош эле, эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн $M(\varepsilon) > 0$ саны жашап, $|x| > M(\varepsilon)$ болгондо $|f(x) - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы

аткарылса, A саны x ∞ге умтулгандагы $y = f(x)$ функциясынын предели деп аталат. Аны төмөнкүдөй жазышат

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

2. Бир жактуу пределдер

Бир жактуу пределдер. Функцияны изилдөө үчүн өзгөрүлмө берилген чекитке бир гана тараптан же сол тараптан, же оң тарабынан гана жакындаган чекиттеги функциянын пределин карап чыгуу пайдалуу. Мындай пределдер бир жактуу деп аталат.

Аныктама 1 (Коши боюнча). Эгерде $\forall \varepsilon > 0$ үчүн $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > \forall x,\ x \in X$ $a < x < a + \delta\ (a - \delta < x < a)$ шартын канааттандырган $|f(x) - A| < \varepsilon$ барабарсыздык аткарылса, A саны $f(x)$функциясынын a чекитиндеги оң (сол) предели деп аталат.

Аныктама 2 (Гейне боюнча). Эгерде a га жыйналуучу каалагандай $\{x_n\}$ удаалаштыгы үчүн $x_n \in X, x_n > a\ (x_n < a)$ аткарылып, ага дал келген $\{f(x_n)\}$ функциялардын маанилеринин удаалаштыгы A га жыйналса, A саны $f(x)$функциясынын a чекитиндеги оң (сол) предели деп аталат.

Бул эки аныктама бири-бирине тең күчтө.

Сол жактуу предел $f(a-0)$ менен белгиленет, б.а.

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x).$$

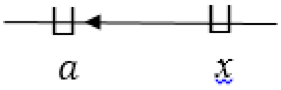
"$x \to a - 0$" жазуусу x өзгөрмөсүнүн a чекитине бир гана сол жактан жакындаганын билдирет (Сүр а).

Сүр. а)

Оң жактуу предел $f(a+0)$ менен белгиленет, б.а.

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

"$x \to a + 0$" жазуусу x өзгөрүлмөсүнүн чекитке бир гана оң жактан жакындаганын билдирет (Сүр б).



Сүр. б)

Эгерде $f(a+0)$ жана $f(a-0)$ жашап жана $f(a+0)=f(a-0)=A$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

85. Пределдин аныктамасын колдонуп $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$ экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. ε – каалагандай оң сан болсун. Бардык $|x-2|<\delta$ барабарсыздыгын канааттандырган x үчүн $\delta>0$ алууга мүмкүн болсо

$$|x^2-4|<\varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылаарын далилдөө талап кылынат.

Эгерде $|x-2|<\delta$, анда $|x+2|=|x-2+4|\le|x-2|+4<\delta+4$

жана $|x^2-4|=|x-2||x+2|<\delta(\delta+4)$ (Каалагандай a жана b сандары үчүн: $|a+b|\le|a|+|b|$, $|ab|=|a||b|$).

$|x^2-4|<\varepsilon$ барабарсыздыгынын аткарылышы үчүн $\delta(\delta+4)=\varepsilon$ болушу жетиштүү, б.а. $\delta^2+4\delta-\varepsilon=0$, мындан $\delta=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$ ($\delta=-2-\sqrt{4+\varepsilon}$ экинчи тамыр алынып салынат, анткени δ оң болуш керек).

Ошентип, каалагандай ε үчүн мындай δ табылып, $|x-2|<\delta$ барабарсыздыгынан $|x^2-4|<\varepsilon$ барабарсыздыгы келип чыгат, б.а.

$$\lim_{x\to 2} x^2=4.$$

86. Пределдин аныктамасын колдонуп $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$ экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. ε – каалагандай оң сан болсун. Бардык $|x|>M$ барабарсыздыгын канааттандырган x үчүн $M>0$ алууга мүмкүн болсо

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылаарын далилдөө талап кылынат.

Эгерде $|x| > M,$ анда $x^2 > M^2$ жана

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| = \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{M^2+1} < \frac{1}{M^2}.$$

Демек, $\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгынын аткарылышы үчүн $\frac{1}{M^2} = \varepsilon$ шартынан Mди табуу жетиштүү, б.а. $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Ошентип, каалагандай ε үчүн мындай M табылып, $|x| > M$ барабарсыздыгынан $\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгы келип чыгат, б.а. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$ экендиги далилденди.

87. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ функциясы үчүн оң жана сол жаккы пределдерин тапкыла

Чыгаруу : $\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

ээ болобуз.

88. $x \to 3$ умтулганда $f(x) = \frac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$ функциясынын сол жана оң жаккы пределдерин тапкыла.

Чыгаруу: Эгерде $x \to 3-0$, анда $1/(x-3) \to -\infty$ жана $2^{1/(x-3)} \to 0$. Демек,
$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \frac{1}{3}$. Эгерде $x \to 3+0$, анда $1/(x-3) \to +\infty$, $2^{1/(x-3)} \to +\infty$ жана
$\lim_{x\to 3+0} f(x) = 0$.

89. $x \to a$ умтулганда $f(x) = e^{1/(x-a)}$ функциясынын сол жана оң жаккы пределдерин тапкыла.

Чыгаруу. Эгерде $x \to a-0$, анда $1/(x-a) \to -\infty$ жана $\lim_{x\to a-0} f(x) = 0$. Эгерде $x \to a+0$, анда $1/(x-a) \to +\infty$ жана $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

Төмөнкү мисалдарды пределдин аныктамасын колдонуп далилдегиле:

90. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3.$

91. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{4}{5}.$

92. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x-1}{x+2}=1.$

93. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x-2}{2x}=\frac{1}{2}.$

Бир жактуу пределдерин тапкыла.

94. $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{2}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{2}{x-3}$

95. $\lim\limits_{x\to 2+0}3^{\frac{1}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 2-0}3^{\frac{1}{x-2}}$

96. Эгерде $f(x)=\begin{cases}2x-1, x\in(-\infty;2)\\ x^2, x\in[2;\infty).\end{cases}$ болсо $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}f(x)$ тапкыла.

2. Чексиз кичине жана чексиз чоӊ функциялар. Эгерде $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ болсо, x aга умтулгандагы $\alpha(x)$ функциясы чексиз кичине деп аталат. Башка сөз менен айтканда, x a га умтулганда эгерде каалагандай $\varepsilon>0$ үчүн $\delta(\varepsilon)>0$ саны жашап, $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ болгондо $|\alpha x|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат.

x aга умтулгандагы $f(x)$ функциясы чексиз чоӊ деп аталат, эгерде каалагандай $N>0$ үчүн $\delta(N)$ саны жашап, $0<|x-a|<\delta(N)$ болгондо $|f(x)|>N$ барабарсыздыгы аткарылат; ал мындай жазылат:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty.$$

Ушуга окшош эле $x\to\infty$ чексиз кичине жана чексиз чоӊ функциялар аныкталат. Чексиз чоӊ функциялар чексиз кичине функциялар менен тыгыз байланышта болушат. Эгерде берилген пределдик өтүүдө $f(x)$ функциясы чексиз чоӊ болсо, анда $\alpha(x)=\frac{1}{f(x)}$ функциясы ошол эле пределдик өтүүдө чексиз кичине болот жана тескерисинче.

Мындан ары, бул параграфта чексиз кичине функциялардын бул же тигил абалын көрсөтүүдө, ар бир жолу шарттабастан, бул функциялардын баары бир эле чектик өтүүдө чексихз кичине болот деп эсептейбиз.

Чексиз кичине функциялардын касиеттери

1) Каалагандай чектүү сандагы чексиз кичине функциялардын алгебралык суммасы чексиз кичине функция болот.

2) Чектүү сандагы чексиз кичине функциялардын көбөйтүндүсү чексиз кичине функция болот.

3) Чексиз кичине функциянын чектелген функцияга көбөйтүндүсү чексиз кичине функция болот.

97. Аныктаманы колдонуп $x \to 1$ умтулганда $1 - x^2$ функциясы чексиз кичине болоорун далилдегиле.

Чыгаруу. ε – каалагандай оң сан болсун. $0 < |x - 0| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырган бардык x үчүн $\delta > 0$ алууга мүмкүн болсо

$$|1 - x^2| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылаарын далилдөө талап кылынат.

Эгерде $|x - 1| < \delta,$ анда $|x + 1| = |x - 1 + 2| \leq |x - 1| + 2 < \delta + 2$

Жана

$$|1 - x^2| = |1 - x||1 + x| < \delta(\delta + 2)$$

Көрсөтмө. (чексиз кичине функциялардын 3-касиетин колдонуп). $|1 - x^2| < \varepsilon$ барабарсыздыгынын аткарылышы үчүн $\delta(\delta + 2) = \varepsilon$ болушу жетиштүү, б.а. $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$

же $\delta = -1 + \sqrt{1 + \varepsilon}$

($\delta = -1 - \sqrt{1 + \varepsilon}$ экинчи тамыр алынып салынат, анткени δ оң болуш керек).

Ошентип, каалагандай ε үчүн мындай δ табылып, $0 < |x - 1| < \delta$ барабарсыздыгынан $|1 - x^2| < \varepsilon$ барабарсыздыгы келип чыгат. Демек, $1 - x^2$ функциясы $x \to 1$ умтулганда чексиз кичине.

98. Аныктаманы колдонуп $x \to 0$ умтулганда $a^{\frac{1}{x^2}}$ функциясы, мында $a > 1$, чексиз чоң болоорун далилдегиле.

Чыгаруу. $N-$ каалагандай оң сан болсун. $0 < |x - 0| < \delta$ же $0 < |x| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырган бардык x үчүн $\delta > 0$ алууга мүмкүн болсо

$$a^{\frac{1}{x^2}} > N$$

барабарсыздыгы аткарылаарын далилдөө талап кылынат. Эгерде $|x| < \delta$ болсо, анда $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2}$ жана $a^{\frac{1}{x^2}} > a^{\frac{1}{\delta^2}}$, ошондуктан талап кылынуучу барабарсыздык $a^{\frac{1}{\delta^2}} = N$, же $\frac{1}{\delta^2} = \log_a N$, $\delta = \frac{1}{\sqrt{\log_a N}}$ болгондо аткарылат.

Ошентип, каалагандай N үчүн δ табылып, $0 < |x| < \delta$ барабарсыздыгынан $a^{\frac{1}{x^2}} > N$ барабарсыздыгы келип чыгат. Демек, $a^{\frac{1}{x^2}}$ функциясы $(a > 1)$ $x \to 0$ умтулганда чексиз чоң болот.

Төмөнкү маселелерди аныктаманы колдонуп далилдегиле:

99. $\frac{1}{x^2-2x+1}$ функциясы $x \to 1$ умтулганда чексиз чоң болот.

100. $a^{-\frac{1}{x^2}}$ $(a > 1)$ функциясы $x \to 0$ умтулганда чексиз кичине болот.

Көрсөтмө. Чексиз кичине жана чексиз чоң функциялардын байланышы жөнүндө теореманы колдонуу.

101. $\frac{\sin x}{x}$ функциясы $x \to \infty$ умтулганда чексиз кичине болот.

Көрсөтмө. Чексиз кичине функциялардын 3-касиетин колдонуу.

§ 1.5. ПРЕДЕЛДЕРДИ ЭСЕПТӨӨ

1. Негизги теоремалардын колдонулушу. Функциялардын пределдерин эсептөөдө төмөнкү теоремаларды билүү зарыл:

$\lim\limits_{x\to a} C = C$, мында C – туруктуу; (1)

$\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$, мында C – туруктуу; (2)

эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ жана $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ жашаса, анда

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a}\varphi(x), \quad (3)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a}\varphi(x), \quad (4)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}, \text{ эгерде } \lim_{x\to a}\varphi(x) \neq 0, \quad (5)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}. \quad (6)$$

Андан башка, бардык негизги элементардык функциялар алардын аныкталуу областы каалаган чекитте үчүн төмөнкү барабардык орун алаарын пайдалануу керек

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right). \quad (7)$$

Андан ары, белгилөө керек:

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{C}{f(x)} = \infty$, эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x)$=0. (8)

Чындыгында, $f(x)$ – чексиз кичине функция, демек, $\frac{1}{f(x)}$ – чексиз чоң; мындан

$\lim\limits_{x\to a}\frac{C}{f(x)} = C \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \infty$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{C}{f(x)} = 0$, эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. (9)

Чындыгында, $f(x)$ – чексиз чоң функция, демек, $\frac{1}{f(x)}$ – чексиз кичине; мындан

$\lim\limits_{x\to a}\frac{C}{f(x)} = C \quad \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = C\cdot 0 = 0; \quad \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0,$ (10)

эгерде $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ жана $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$. Чындыгында, $f(x)$ – чексиз кичине функция, ал эми $\varphi(x)$ – чексиз чоң, бирок анда $\frac{1}{\varphi(x)}$ – чексиз кичине; мындан

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

102. $\lim_{x\to 1}(5x^2 - 6x + 7)$ тапкыла.

Чыгаруу. (2), (4), (1) жана (3) формулаларынан

$$\lim_{x\to 1} 5x^2 = 5\lim_{x\to 1} x^2 = 5\lim_{x\to 1} x \cdot x = 5\lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} x = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5;$$

$\lim_{x\to 1} 6x = 6\lim_{x\to 1} x = 6 \cdot 1 = 6$; $\lim_{x\to 1} 7 = 7$; $\lim_{x\to 1}(5x^2 - 6x + 7) = 5 - 6 + 7 = 6.$

103. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ тапкыла.

Чыгаруу. (4), (3) жана (5) формулаларын колдонобуз:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 - 1) = -1; \lim_{x\to 0}(2x^2 - x - 1) = -1 \neq 0;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{\lim_{x\to 0}(x^2 - 1)}{\lim_{x\to 0}(2x^2 - x - 1)} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

104. $\lim_{x\to 2}(3x)^{x^2}$ тапкыла.

Чыгаруу. $\lim_{x\to 2} 3x = 6$ жана $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ болгондуктан, (6) формуласын колдонуп

$$\lim_{x\to 2}(3x)^{x^2} = 6^4 = 1296.$$

105. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x$ тапкыла.

Чыгаруу. (7) формуласы боюнча $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

106. $\lim_{x\to 1} \frac{3}{(x-1)^3}$ тапкыла.

Чыгаруу. (8) формуласын колдонуп

$$\lim_{x\to 1} \frac{3}{(x-1)^3} = \infty \text{ алабыз}$$

анткени

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^3 = \lim_{x\to 1}[(x-1)]^3 = 0.$$

107. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{5}{\mathrm{tg}x}$ тапкыла.

Чыгаруу. (9) формуласын колдонуп

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{5}{\mathrm{tg}x} = 0$$

экендигин алабыз, анткени

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}x = \mathrm{tg}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = \infty.$$

108. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{lnx}$ тапкыла.

Чыгаруу. (10) формуласын колдонуп

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{lnx} = 0$$

экендигин алабыз, анткени

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \text{ жана } \lim_{x\to 0} lnx = -\infty.$$

Төмөнкү пределдерди тапкыла:

109. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

110. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x+2}{x^2-1}$.

111. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$.

112. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+5}{x^2+3x+7}$.

113. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2)^{lgx}$.

114. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{8}{x^2}}$

115. $\lim\limits_{x\to 1} lgx$.

116. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}x$.

117. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \arcsin x$.

118. $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}} \mathrm{arctg}x$.

119. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5}{\sin^3(x-1`)}$.

120. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2}{\sqrt{tg3x}}$.

121. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{\mathrm{ctg}^3(2x+4`)}$.

122. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{2^{x-1}}$.

123. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

124. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{\mathrm{ctg}\left[\frac{2(x+1)}{3}\right]}$.

2. Аныксыздыктарды ачуу. 1-пунктта көрсөтүлгөн мисалдардын чыгарылышында көрүнүп тургандай, жөнөкөй учурларда пределдерди табууда берилген туюнтмада аргументтин пределдик маанисинин өзгөртүп түзүүсүнө келтирилет. Көпчүлүк учурларда, аргументтин пределдик маанисин өзгөртүп түзүүдө $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ түрдөгү анык эмес туюнтмаларга келтирилет. Бул учурларда функциянын пределин табууну аныксыздыкты ачуу деп аташат. Аныксыздыкты ачуу үчүн пределге өтүүдөн мурда, берилген туюнтманы өзгөртүп түзүүнү жүргүзүүгө туура келет.

Мындай өзгөртүп түзүүлөрдө кандай ыкмалар колдонула тургандыгы, кийинки мисалдарда көрсөтүлөт.

125. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$ тапкыла.

Чыгаруу. Бул мисалды чыгаруу үчүн берилген параграфтагы (5) формуланы колдонууга болбойт, анткени бөлүмдүн предели нөлгө барабар.

Түздөн-түз ордуна коюуу берилген туюнтмадагы аргументтин пределдик маанисин $\frac{0}{0}$ түрдөгү анык эмес туюнтмаларга келтирилет. Демек, пределге өтүүдөн мурда, берилген туюнтманы өзгөртүп түзүү керек. $x = 2$ болгондо бөлчөктүн алымы жана бөлүмү нөлгө айланат, ошондуктан $x^2 - 5x + 6$ жана $x^2 - 2x$ көп мүчөлөрү $x - 2$ биномуна калдыксыз бөлүнөт (Безунун теоремасы); мындан

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)x} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x}.$$

Эми (алынган туюнтмадагы аргументтин пределдик маанисинин түздөн-түз ордуна коюуунун жыйынтыгында)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x} = -\frac{1}{2}$$

алынат.

126. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ тапкыла.

Чыгаруу. Мында $\frac{0}{0}$ аныксыздыгына ээ болобуз; аны ачыш үчүн бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн, алымынын түйүндөшүнө көбөйтөбүз. Мындан кийин x^2ка кыскартууга жана бөлчөктүн предели жөнүндөгү теореманы колдонууга мүмкүн болот:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{(\sqrt{1+x^2}+1)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{1}{2}.$$

127. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ тапкыла.

Чыгаруу. Кайра эле $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздык. Бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн сумманын толук эмес квадратына көбөйтөбүз, б.а. $\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1$ка:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}.$$

128. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}$ тапкыла.

Чыгаруу. Берилген учурда $\frac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздыкка ээ болобуз. Мындай түрдөгү мисалдарда бөлчөктүн бөлүмүн жана алымын мүчөлөп x^n ге бөлүшөт, мында n –бөлчөктөгү көп мүчөнүн даражасы. Бөлүмдү жана алымды x^2 ка бөлөбүз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{10}{x^2}}=2,$$

анткени $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ жана $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x^2}=0$.

129. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+m)(x+n)}-x\right]$ тапкыла.

Чыгаруу. $\infty-\infty$ түрүндөгү аныксыздыкка ээ болобуз. Предел белгисинин алдында турган туюнтманы $\sqrt{(x+m)(x+n)}+x$ ке көбөйтүп жана бөлөбүз:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+m)(x+n)}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+m)(x+n)-x^2}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(m+n)x+mn}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(m+n)+\frac{mn}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{x}\right)\left(1+\frac{n}{x}\right)}+1}=\frac{m+n}{2}.$$

130. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right]$ тапкыла.

Чыгаруу. Берилген мисалда $\infty-\infty$ түрүндөгү аныксыздык алынат.

Предел белгисинин алдында турган туюнтманы $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}$ ке көбөйтүп жана бөлөбүз:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=a\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$$

Төмөнкү пределдерди тапкыла:

131. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

132. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$.

133. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

134. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$.

135. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$.

136. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

137. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$.

138. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

147. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

148. $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

149. $\lim\limits_{x\to8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

150. $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

151. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

152. $\mathrm{Lim}_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\right.$ $\left.-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

153. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

139. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

140. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

141. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

142. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

143. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

144. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

145. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

146. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-x\right)$.

154. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

155. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x}{2x+3}$.

156. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$.

157. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+5}{0{,}01x^2-6x}$.

158. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$

159. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

160. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$.

161. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

162. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

163. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

3. Биринчи сонун предел. Трансцендтик функциялардын пределдерин эсептөөдө көбүнчө

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \qquad (11)$$

формуласы колдонулат. 1-сонун пределден төмөнкүдөй натыйжалар келип чыгат

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1.$$

Мисалдарды карайбыз.

164. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ тапкыла.

Чыгаруу. $x \to 0$ умтулганда $\alpha = 2x$ дагы нөлгө умтулат, ошондуктан, алымды жана бөлүмдү 2 ге көбөйтүп жана (11) формуланы колдонуп

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2.$$

165. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ тапкыла.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$

(11) формуласына ылайык $x \to \infty$ умтулганда $\alpha = \frac{1}{x} \to 0$.

Төмөнкү пределдерди тапкыла:

166. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$.

167. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\sin\frac{2}{3x}$.

168. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

169. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{\sin^m x}$.

170. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

171. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

172. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

173. $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

174. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\alpha x}{x}$.

175. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{tg\,\beta x}$.

176. $\lim\limits_{x\to 0} x\, ctg\, x$.

177. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$.

178. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$.

e **тибиндеги пределдер (2-сонун предел).**

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \qquad (12)$$

экендиги белгилүү. Бул формула “ e тибиндеги пределдер” деп аталган пределдерди эсептөөдө колдонулат. 2-сонун пределдин натыйжалары:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=1, a>0, a\neq 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^x=e^{-k}$$

Мисалдарды чыгарууда төмөнкү сонун пределдерди эске алууга болот:

логарифмалык сонун предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

көрсөткүчтүү сонун предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

даражалуу сонун предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$

Бул пределдерди эсептөөдө 1^∞ түрүндөгү аныксыздыкты жолуктурабыз.

Мисалдарды карайбыз.

179. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg\,x)^{ctg\,x}$ тапкыла.

Чыгаруу. $ctg\,x=\frac{1}{tg\,x}$ болгондуктан, анда

$$\lim_{x\to 0}(1+tg\,x)^{ctg\,x}=\lim_{x\to 0}(1+tg\,x)^{\frac{1}{tg\,x}}=e$$

(12) формулага ылайык, $x\to 0$ умтулганда $\alpha=tg\,x\to 0$.

180. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ тапкыла.

Чыгаруу. Бул мисалда негизинин предели 1 ге барабар (алымын жана бөлүмүн x ке бөлгүлө), ал эми даражанын көрсөткүчү чексизге умтулат; 1^∞ түрүндөгү аныксыздыкка ээ болобуз (кээде “ e тибиндеги аныксыздык” деп айтышат). Бул аныксыздыкты ачуу үчүн даражанын негизин $1+\alpha$ түрүндө көрсөтөбүз, ал эми көрсөткүчүндө $\frac{1}{\alpha}$ көбөйтүүчүнү бөлүп алабыз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}} = e^2.$$

Квадраттык кашаадагы пределге өтүп, e санын алдык, (12) формуласына ылайык $x\to\infty$ умтулганда $\alpha = \frac{2}{x-1} \to 0$.

181. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg^2 x)^{ctg^2 x}$ тапкыла.

Чыгаруу. $ctg\, x = \frac{1}{tg\, x}$ болгондуктан, анда

$$\lim_{x\to 0}(1+3tg^2 x)^{ctg^2 x} = \lim_{x\to 0}(1+3tg^2 x)^{\frac{1}{tg^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+3tg^2 x)^{\frac{1}{3tg^2 x}}\right]^3 = e^3.$$

182. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+8x)}{2x}$.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+8x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+8x)}{8x}\cdot 8x}{2x}$ деп жазып алабыз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+8x)}{8x} = 1, \text{анткени } 8x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x}{2x} = \frac{8}{2} = 4$$

183. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-7x+11)}{x-2}$

Чыгаруу. Өзгөртүп түзүүлөрдү аткарабыз

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-7x+11)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(1+x^2-7x+10)\cdot(x^2-7x+10)}{x^2-7x+10}$ мындан

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(1+x^2-7x+10)}{x^2-7x+10} = 1,$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-5)=-3$$

184. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n$

Чыгаруу. $n=ax$ деп белгилеп алып, $n\to\infty$ болгондо $x\to\infty$ умтулат, анда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{a}=e^{a}$$

Төмөнкү пределдерди тапкыла:

185. $\lim_{x\to 0}(1+sin\,x)^{\operatorname{cosec} x}$.

186. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

187. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$.

188. $\lim_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{2x^3}}$.

189. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

190. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

§ 1.6. ЧЕКСИЗ КИЧИНЕЛЕРДИ САЛЫШТЫРУУ. ЭКВИВАЛЕНТТҮҮЛҮК

1. Чексиз кичинелердин тартиптерин салыштыруу. Эгерде $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ чексиз кичине функцияларынын катышынын предели $lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ нөлдөн айырмалуу болгон кандайдыр бир С санына барабар болсо, $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ чексиз кичине функциялары бирдей тартиптеги чексиз кмчмнелер деп аталышат. Эгерде $C=0$ болсо, анда чексиз кичине $\alpha(x)$ $\beta(x)$ ке салыштырмалуу көбүрөөк жогорку тартиптеги чексиз кичине деп аталат.

Кээде чексиз кичине функцияларды так салыштыруу зарылчылыгы келип чыгат – алардын тартиптерин сандар менен туюнтуу. Бул учурда салыштыруулучу чексиз кичине функциялардын бирөөнү негизги катары кабыл алышат жана ага салыштырмалуу башка чексиз кичинелердин тартибин аныкташат.

Аны төмөнкү аныктамага негиздеп жасашат: эгерде эки $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ чексиз кичине функциялардан экинчиси негизги болуп кабыл алынса, анда чексиз кичине $\alpha(x)$ чексиз кичине функция $\beta(x)$ ке салыштырмалуу p тартибинде чексиз кичине деп аталат, эгерде

$$lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^p} = C,$$ мында C – нөлдөн айырмалуу болгон сан.

Эгерде $lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ болсо, чексиз кичине $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ функциялары эквиваленттүү деп аталат. Эквиваленттүүлүк $\sim$ символ менен белгиленет, б.а. $\alpha(x) \sim \beta(x)$ деп жазышат.

Эквиваленттүү чексиз кичине функциялар жөнүндө теоремалар.

1-теорема. Эгерде чексиз кичинелерди алардын эквиваленти менен алмаштырганда, эки чексиз кичине функциялардын катышынын предели өзгөрбөйт.

2-теорема. Эки чексиз кичине функциялар эквиваленттүү болуш үчүн , алардын айырмасы алардын ар бири менен салыштырмалуу көбүрөөк жогорку тартипте чексиз кичине болушу зарыл жана жетиштүү.

Негизги эквиваленттүүлүктөр:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad (2)$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad (3)$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad (4)$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x), \quad (5)$$

$$\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x), \quad (6)$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ \ln a, \quad (7)$$

Мисалы, эгерде $x \to a, \alpha(x) \to 0$ болсо, анда

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x),$$

экендигин көрсөтөбүз, б.а. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$ экендигин көрсөтөбүз.

Чындыгында $\alpha(x) = y$ болсун. Анда, эгерде $x \to a\ \alpha(x) \to 0$ болсо, анда $x \to 0$ болгондо $y \to 0$, ошондуктан

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}y}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y\cdot\cos y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\cdot 1=1.$$

Демек, эгерде $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$ болгондо, $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$ болот. Дагы мисал. $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$ болсо

$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),$$

б.а.

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1$$

экендигин көрсөтөбүз.

$\alpha(x)=y$ болсун. Анда, эгерде $x\to a$, $\alpha(x)\to 0$ болсо, анда $x\to a$ болгондо $y\to 0$, ошондуктан

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}.$$

$e^{y}-1=z$ менен белгилейбиз. $y\to 0$ $z\to 0$ болсо, анда

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\ln(1+z)}=\frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]}$$

$$=\frac{1}{\ln e}=1.$$

Демек, эгерде $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$ болгондо, $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$ болот.

191. $\frac{2x^2}{1+x}$ жана x^2 функциялары $x\to 0$ умтулганда бирдей тартиптеги чексиз кичине болоруун далилдегиле.

Чыгаруу. Берилген эки функциянын катышынын пределин табабыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2}{1+x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2(x+1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=2\neq 0.$$

Берилген чексиз кичине функциялар бирдей тартиптеги чексиз кичине болот.

192. $\frac{x^3}{3-x}$ функциясынын тартиби $x\to 0$ умтулганда x^2 функциясынын тартибинен жогору болоруун далилдегиле.

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2(3-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(3-x)}=0$$

экендиги белгилүү б.а. $\frac{x^3}{3-x}$ функциясы x^2 функциясына караганда көбүрөөк жогорку тартиптеги чексиз кичине болот.

193. $x\to 0$ умтулганда x ке салыштырмалуу $1-\cos x$ функциясы экинчи тартиптеги чексиз кичине функция болоорун далилдегиле.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ ти табабыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

Эми $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ ты табабыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Демек, $1-\cos x$ функциясы x ке салыштырмалуу экинчи тартиптеги чексиз кичине функция.

194. $x\to 0$ умтулганда $\frac{x}{1-x}$ жана $\frac{x}{1+x^2}$ чексиз кичине функциялары эквиваленттүү экендигин далилдегиле.

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{1-x}=1.$$

Демек, $x\to 0$ умтулганда $\frac{x}{1-x}\sim\frac{x}{1+x^2}$.

Кийинки эки мисалда турактуу C жана k нын кандай маанисинде $x\to 0$ умтулганда $\alpha(x)$ функциясы $\beta(x)=x^k$ функциясына эквиваленттүү экендигин аныктагыла.

195. $\alpha(x)=C\ln\cos 4x$.

Чыгаруу. $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ функцияларынын эквиваленттүүлүгү үчүн

$$\lim_{x\to 0}\frac{C\ln\cos 4x.}{x^k}=1;$$

$$C\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{x^k}=1,$$

$x\to 0$ умтулганда $\ln\cos 4x \sim \cos 4x-1$;

$C\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2sin^2 2x}{x^k}=1$, же $-2C\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^k}=1$,

$x\to 0$ умтулганда $\sin 2x\sim 2x$; мындан

$$-8C\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^k}=1.$$

Демек, эгерде $C=-\frac{1}{8}$ жана $k=2$ болгондо, $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ эквиваленттүү.

196. $\alpha(x)=C(\cos 4x-\cos 2x)$.

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to 0}\frac{C(\cos 4x-\cos 2x)}{x^k}=1.$$

Барабардыктын сол жагын өзгөртүп түзөбүз:

$C\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin x}{x^k}=1$, $-2C\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cdot x}{x^k}=1$, же $-6C\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^k}=1$.

Демек, эгерде $C=-\frac{1}{6}$ жана $k=2$ болгондо, $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ эквиваленттүү.

197. $x\to 1$ умтулганда $\frac{1-x}{1+x}$ жана $1-\sqrt{x}$ функциялары бир тартиптеги чексиз кичине функциялар болоорун далилдегиле.

198. $x\to 0$ умтулганда $\frac{3x^4-x^5}{x+1}$ функциясынын тартиби x^3 функциясынын тартибинен жогору болоорун далилдегиле.

199. $x\to 0$ умтулганда $tg\,x-\sin x$ функциясы x ке салыштырмалуу үчүнчү тартиптеги чексиз кичине болоорун далилдегиле.

Төмөнкү мисалдарда чексиз кичине функциялардын эквиваленттүүлүгүн далилдегиле:

200. $x\to 0$ умтулганда $\frac{x}{2}$ жана $\sqrt{1+x}-1$.

201. $x\to 0$ умтулганда $e^{2x}-e^x$ жана $2x-\sin x$.

202. $x\to 0$ умтулганда $e^{\sin x}-1$ жана x.

203. $x \to 0$ умтулганда $\ln\left(1+\sqrt{x\sin x}\right)$ жана x.

204. $x \to 0$ умтулганда $e^x - \cos x$ жана x.

Төмөнкү мисалдарда турактуу C жана k нын кандай маанисинде $x \to 0$ умтулганда $\alpha(x)$ функциясы $\beta(x) = x^k$ функциясына эквиваленттүү экендигин аныктагыла.

205. $\alpha(x) = C\left(\sqrt{1+2x^2} - 1\right)$.

206. $\alpha(x) = C\left(2^{\sin 2x} - 1\right)$.

207. $\alpha(x) = C(\sin 3x - 3\sin x)$.

208. $\alpha(x) = C\ \ln(3 - 2\cos x)$.

2. Эквиваленттүү чексиз кичинелердин пределдерди эсептөөдө колдонулушу. Чексиз кичинелердин катышынын пределин эсептөөдө төмөнкү эквивалентүүлөрдү алмаштыруу жөнүндөгү теореманы колдонушат: алымsy жана бөлүмүн каалагандай эквивалентүү чексиз кичине функцияга алмаштырганда катыштын предели өзгөрүлбөйт.

209. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

Чыгаруу. $x \to 3$ умтулганда $x - 3$ функциясы чексиз кичине, демек

$$\sin(x-3) \sim x - 3.$$

Чексиз кичине $\sin(x-3)$ функцияны, ага эквивалентүү $x - 3$ функцияга алмаштырганда катыштын предели өзгөрбөйт, анда
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{2}$.

210. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$ тапкыла.

Чыгаруу. Алгач тригонометриянын формуласын колдонобуз
$1 - \cos mx = 2sin^2\frac{mx}{2}$.

$x \to 0$ умтулганда $\sin\frac{mx}{2} \sim \frac{mx}{2}$, ал эми $2sin^2\frac{mx}{2} \sim \left(\frac{mx}{2}\right)^2$.

Алымындагы чексиз кичине $1 - \cos mx$ ти эквиваленттүү $2\left(\frac{mx}{2}\right)^2$ функцияга алмаштырып,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{mx}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{m^2}{2}$ алабыз.

211. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}$ тапкыла.

Чыгаруу. Тригонометриянын формуласы боюнча,

$\cos 4x-\cos 2x=-2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2}=-2\sin 3x\sin x.$

$x\to 0$ умтулганда

$$\sin 3x\sim 3x,\qquad \sin x\ \sim x, \arcsin 3x\sim 3x,$$

$$\text{б.а. } (\arcsin 3x)^2\sim (3x)^2,$$

ошондуктан

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin x}{\arcsin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2(3x)\cdot x}{(3x)^2}=-\frac{2}{3}.$$

212. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\ \frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$ ти тапкыла.

Чыгаруу. $x\to 0$ умтулганда $arctg\ \frac{7}{4}\ x\sim\frac{7}{4}x$, ал эми $e^{-2x}-1\sim(-2x)$ болгондуктан, анда

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ \frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x}{-2x}=-\frac{7}{8}.$$

213. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$ ти тапкыла.

Чыгаруу. Алгач алымын жана бөлүмүн өзгөртүп түзөбүз,андан кийин эквиваленттери менен алмаштырабыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}\left[e^{(\alpha-\beta)x}-1\right]}{2\cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}(\alpha-\beta)x}{2\cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}\frac{(\alpha-\beta)x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}}{\cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}}=1.$$

214. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$ ти тапкыла.

Чыгаруу. (6) формуласын пайдаланыш үчүн логарифм белгисинин астына бирди кошуп жана кемитебиз:

$$\ln\cos x=\ln(1+\cos x-1)\ \sim\ \cos x-1$$

$$(x\to 0 \text{ умтулганда } \alpha=\cos x-1\to 0).$$

Эквиваленттүү алмаштыруу жөнүндөгү теорема боюнча $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}$ ди алабыз. (201 кара)

215. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$ ни тапкыла.

Чыгаруу. $1=\ln e$, анда

$\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}.$

Бирок $x\to e$ умтулганда $\frac{x}{e}-1$ функциясы чексиз кичине, анда

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{x-e}{x-e}=\frac{1}{e}.$$

216. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$ ти тапкыла.

Чыгаруу. $x\to\infty$ умтулганда $\frac{1}{x}$ – чексиз кичине. (7) формуласын колдонуп,

$$\lim_{x\to\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln a}{x}x=\ln a$$

ээ болобуз.

Эгерде $x\to a\,(a\neq 0)$ умтулганда , анда катарлардын учурунда, эквиваленттүүлүк теоремасын алмаштыруу теоремасын колдонуп, алгач $\alpha=a-x$ (же $x-a$) чексиз кичине функцияны киргизүү ыңгайлуу.

217. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ ти тапкыла.

Чыгаруу. Мында алымы жана бөлүмү – чексиз кичине функциялар. Бирок x чексиз кичине функция болбойт (нөлгө умтулбайт, ал эми π ге умтулат), ошондуктан $\sin 2x\sim 2x$ катышы мааниге ээ эмес.

$\alpha=\pi-x$ чексиз кичинени киргизебиз, анда $x=\pi-\alpha$ жана

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2(\pi-\alpha)}{\sin 3(\pi-\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(2\pi-2\alpha)}{\sin(3\pi-3\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{-2\alpha}{3\alpha}=-\frac{2}{3}.$$

218. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$ ни тапкыла.

Чыгаруу. Алдын ала өзгөрүлмөнү алмаштыруу жасайбыз. Эгерде $x-1=\alpha$ белгилөөнү киргизсек, анда $x\to 1$ умтулганда $\alpha\to 0$; анда

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=-\lim_{\alpha\to 0}\alpha tg\frac{\pi(\alpha+1)}{2}=-\lim_{\alpha\to 0}\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\alpha ctg\frac{\pi\alpha}{2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{tg\frac{\pi\alpha}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\frac{\pi\alpha}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

$u(x)^{v(x)}$ түрүндөгү туюнтманын пределин эсептөөдө, мында берилген пределдик өтүүдө $u(x)\to 1$ жана $v(x)\to\infty$ умтулганда

$$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}$$

формуласын колдонуу ыңгайлуу.

219. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}$ тапкыла.

Чыгаруу.

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=e^{\lim\limits_{t\to\infty}(-t)\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)}=e^{-\lim\limits_{t\to\infty}t\left(-\frac{1}{t}\right)}=e.$$

220. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^{x}$ тапкыла.

Чыгаруу.

$$\mathrm{Lim}_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\cos\frac{m}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\frac{m}{x}-1\right)}=$$

$$=e^{-2\lim\limits_{x\to\infty}x\,sin^2\frac{m}{2x}}=e^{-2\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{m^2}{4x^2}}=e^{-\frac{m^2}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

221. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}$ тапкыла.

Чыгаруу. $x\to 0$ умтулганда берилген бөлчөктүн алымында жана бөлүмүндө чексиз кичине функциялар турушат. Эгерде аларды эквиваленттери менен алмаштырсак, бул функциялардын катыштарынын предели өзгөрбөйт. $x\to 0$ умтулганда

$\ln(1+2x)\sim 2x,$ ал эми $x^3+2x^4\sim x^3,$

$(x^3+2x^4)-x^3=2x^4$ айырмасы x^3+2x^4 жана x^3 менен салыштырмалуу көбүрөөк жогорку тартиптеги чексиз кичине , төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^3+2x^4}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x}+2}=0 \text{ жана } \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^3}=2\lim_{x\to 0}x=0$$

(§ 6 дагы 2-теореманы кара), ошондуктан

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

222. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^3-x^5}{3x-x^4}$ тапкыла.

Чыгаруу. § 1.6 дагы 2-теорема боюнча, $x\to 0$ умтулганда

$$\sin x+x^3-x^5\sim\sin x,$$

анткени $(\sin x+x^3-x^5)-\sin x=x^3-x^5$ айырмасы $\sin x+x^3-x^5$ жана $\sin x$ менен салыштырмалуу көбүрөөк жогорку тартиптеги чексиз кичине. Ушуга окшош эле $3x-x^4\sim 3x$, ошондуктан

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^3-x^5}{3x-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

Төмөнкү пределдерди тапкыла:

223. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{4x+8}$.

224. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{tg\,(a+x)-tg\,(a-x)}$.

225. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

Көрсөтмө. 1ди $\sin\frac{\pi}{2}$ге алмаштыргыла.

226. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

Көрсөтмө. Бөлүмүндөгү 2ни кашаанын сыртына чыгарып жана $\frac{1}{2}$ди $\cos\frac{\pi}{3}$ кө алмаштыргыла.

227. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tg\,x}\right)$.

Көрсөтмө. $tg\,x$ти $\frac{\sin x}{\cos x}$ке алмаштырып жана бөлчөктү жалпы бөлүмгө

234. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

235. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Көрсөтмө. $\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}$.

236. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{nx}$.

237. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

Көрсөтмө. $x\to -\infty$ умтулганда 3^x жана 2^x чексиз кичине жана $\ln(1+3^x)\sim 3^x$.

238. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

келтиргиле.

228. $\lim\limits_{x\to 0} ctg\, 2x \cdot ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Көрсөтмө. $ctg\, x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ жана

$ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$ экендигин эске алгыла.

229. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\arcsin x}{3x}$.

230. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + arctg\, x}$.

Көрсөтмө. Бөлүмүндөгү жана алымындагы x ти кашаанын сыртына чыгаргыла.

231. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{mx} - 1}{n\, x}$.

232. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x} - e}{x - 1}$.

Көрсөтмө. Бөлүмүндөгү e ни кашаанын сыртына чыгаргыла.

233. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$.

239. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)}$.

Көрсөтмө. $x \to 0$ умтулганда

$\ln(\cos \alpha x) \sim \cos \alpha x - 1$.

240. $\lim\limits_{x\to \infty} \{x[\ln(a + x) - \ln x]\}$

241. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left[tg\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)\right]}{\sin bx}$.

242. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{x} - b^{x}}{x}$.

243. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{x} - a^{-x}}{\sin \beta x}$.

244. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{-\frac{1}{x}} - 2\right)$.

Көрсөтмө. $x^2\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{-\frac{1}{x}} - 2\right) =$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2x}} - a^{-\frac{1}{2x}}\right)^2}{\frac{1}{x^2}} = \frac{a^{-\frac{1}{x}}\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= a^{-\frac{1}{x}} \frac{\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}}.$$

245. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

Көрсөтмө. $x - \pi$ни α.

246. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$.

247. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) tg\, x$.

248. $\lim\limits_{x\to 2} [1 - (x - 2)]^{-\frac{1}{x-2}}$.

249. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{x^4}$.

253. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

254. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (tg\, x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

255. $\lim\limits_{x\to 0} \left[tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right]^{ctg\, 2x}$.

256. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{32x^5 - x^8}}{e^{5x} - 1}$.

250. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$.

251. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

252. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

257. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2tg\,x-x^4+x^2}{arctg\,3x}$.

258. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-sin^2x}{\arcsin x}$.

259. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x-tg^4x}{3x^2+5x^4}$.

§ 1.7. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮК ЖАНА ФУНКЦИЯЛАРДЫН ҮЗҮЛҮҮ ЧЕКИТТЕРИ

1. Аныктама. $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат, эгерде:

1) ал бул чекитте аныкталса; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ жашаса; 3) бул предел функциянын x_0 чекитиндеги маанисине барабар болсо, б.а.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Эгерде жок дегенде ушул үч шарттын бирөө аткарылбаса, анда функция x_0 чекитинде үзгүлтүктүү деп аталат,ал эми x_0 чекити функциянын үзүлүү чекити деп аталат.

Үзгүлтүктөрдүн төмөнкүдөй түрлөрүн белгилейбиз: а) эгерде $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ жашаса, бирок $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде аныкталбаса же аныкталса, бирок $f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ болсо, анда x_0 чекитинде үзгүлтүк жоюулуучу болот. Бул учурда үзгүлтүктү жоюуу үчүн функцияны x_0 чекитинде андан ары аныкташ керек же анын маанисин $f(x_0)$ бул чекитте $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ пределине барабар болгондой өзгөртүш керек;

б) эгерде $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ жашабаса, бирок x_0 чекитиндеги эки бир жактуу пределдер жашаса (алар бири бирине барабар эмес), анда анда x_0 чекитинде үзгүлтүк биринчи түрдөгү үзгүлтүк же секирик болот;

в) эгерде жок дегенде бир жактуу пределдердин бирөө жашабаса (көпчүлүк учурларда чексизге барабар), демек $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ жашабайт, анда x_0 чекитинде үзгүлтүк экинчи түрдөгү үзгүлтүк болот.

Биринчи жана экинчи түрдөгү үзгүлтүктөр жоюлбайт.

Эгерде функция кесиндинин бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо, анда кесиндиде үзгүлтүксүз деп аталат.

2. Үзгүлтүксүз функциялардын касиеттери. Төмөнкү теоремалар маанилүү мааниге ээ:

1) Негизги элементардык $a^x,\ x^a,$ $\log_a x,\ \sin x,\ \cos x,\ tgx, ctgx, \arcsin x\,, \arccos x\,, arctgx$ функциялары аныкталган жерлердин бардык чекиттеринде үзүлтүксүз.

2) Эгерде x_0 чекитинде $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары үзгүлтүксүз болсо, анда ушул эле чекитте $f(x) \pm \varphi(x),\ f(x)\varphi(x),$ $\frac{,f(x)}{\varphi(x)}$, ($\varphi(x_0) \neq 0$ болсо) функциялары үзгүлтүксүз болушат.

3) Эгерде $u = \varphi(x)$ x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо, ал эми $y = f(u)$ $u_0 = \varphi(x_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда $y = f[\varphi(x)]$ татаал функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз.

Бул теоремалардан мындай натыйжа келип чыгат: алгебралык амалдардын чектүү санынан түзүлгөн жана негизги элементардык функциялардын функцияларынан алынган ар бир $f(x)$ функция, негизги элементардык функциялардын бардык түзүүчүлөрүнөн аныкталган, бөлүмү нөлгө айланган чекиттерден башка бардык чекиттерде үзгүлтүксүз болот.

Көпчүлүк убакта , каалаган көп мүчө бардык сандык окто үзгүлтүксүз функция; каалаган бөлчөк – рационалдык функция (эки көп мүчөнүн катышы) бөлүмү нөлгө айланбаган бардык чекиттерде үзгүлтүксүз.

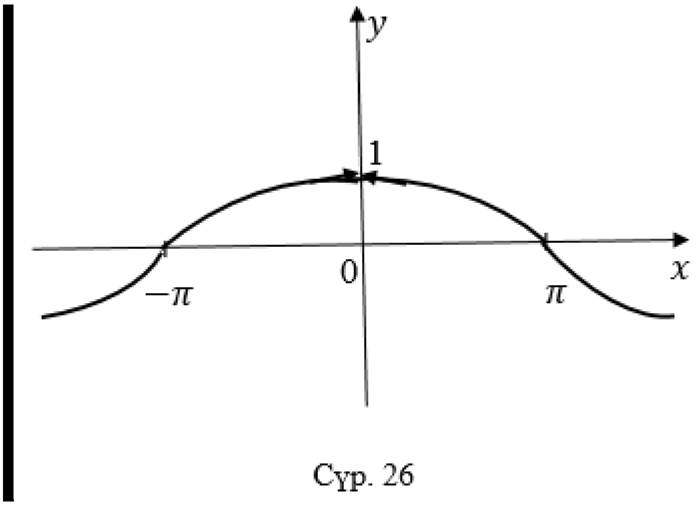
260. Үзгүлтүксүздүктү, үзүлүү чекитин табуу, үзүлүүнүн мүнөзүн көрсөтүү, ал эми жоюлуучу үзүлүү учурунда үзгүлтүксүз $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функцияга чейин аныктагыла.

Чыгаруу. $\sin x$ жана x каалагандай чекитте үзгүлтүксүз (теорема 1), анда алардын катышы $\frac{\sin x}{x}$ теорема 2 боюнча, бардык нөлдөн айырмалуу x_0 чекитинде үзгүлтүксүз. x_0 чекитинде берилген функция аныкталган эмес, ошондуктан үзүлүүгө ээ. Бирок $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ болгондуктан, бул чекиттеги үзүлүү жоюулуучу болот.

$f(0)=1$ деп койсок, анда функция

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$$

$x=0$ чекитинде үзгүлтүксүз (сүр. 26).



Сүр. 26

261. Функциянын үзгүлтүксүздүгүн жана үзүлүү чекитин изилдегиле

$$f=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}\ x-1, \text{эгерде } x\neq -1,\\ 1, \quad \text{эгерде } x\neq -1.\end{cases}$$

Чыгаруу. Берилген функция x тин бардык маанилери үчүн аныкталган. Эгерде $x>-1$ болсо, анда

$$x+1>0, |x+1|=x+1 \text{ жана } \frac{|x+1|}{x+1}=1.$$

Бул учурда

$$f(x)=1\cdot x-1=x-1,$$

ошондуктан $x > -1$ бардык маанилери үчүн функция биринчи даражадагы көп мүчө катары үзгүлтүксүз. Ушуга окшош эле, $x < -1, \frac{|x+1|}{x+1} = -1$ жана

$$f(x) = -x - 1$$

биринчи даражадагы көп мүчө катары үзгүлтүксүз.

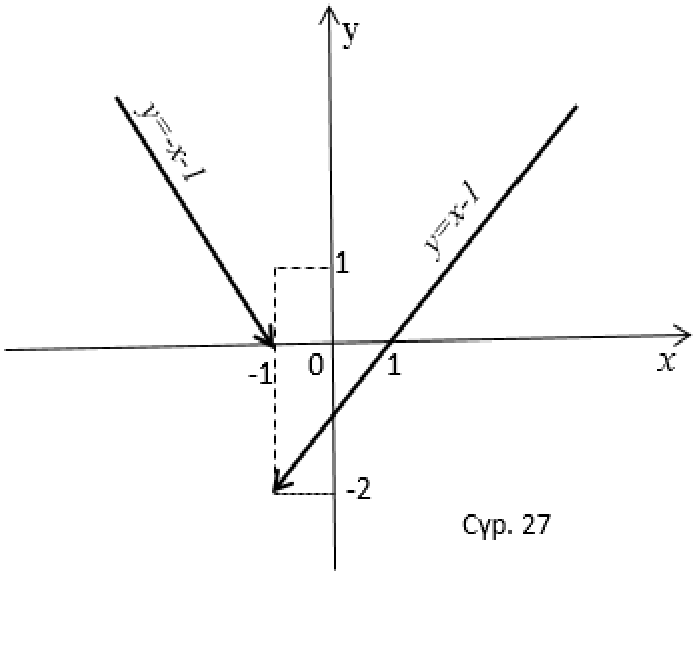
$x_0 = -1$ чекитин изилдейбиз. Бул чекитте функциянын предели жашаарын түшүндүрөбүз. $x \to -1$ умтулганда оң жана сол бир жактуу пределдерди эсептейбиз. $x < -1$ болгондо $f(x) = -x - 1$, ал эми $x > -1$ болсо $f(x) = x - 1$, ошондуктан

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} (-x - 1) = +1 - 1 = 0,$$

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} (x - 1) = -1 - 1 = -2.$$

Демек, $f(x)$ функциясынын $x_0 = -1$ чекитиндеги бир жактуу пределдери жашайт, бирок өз ара барабар эмес; бул чекитте берилген функция биринчи түрдөгү үзүлүүгө ээ. Анын графиги 27-сүрөттө көрсөтүлгөн. Ал эки жарым түз сызыктан жана чекиттерден турат:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ эгерде } x > -1, \\ 1 \text{ эгерде } x = 1, \\ -x - 1 \text{ эгерде } x < -1. \end{cases}$$



Сүр. 27

262. $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн изилдегиле жана үзүлүү чекитин тапкыла.

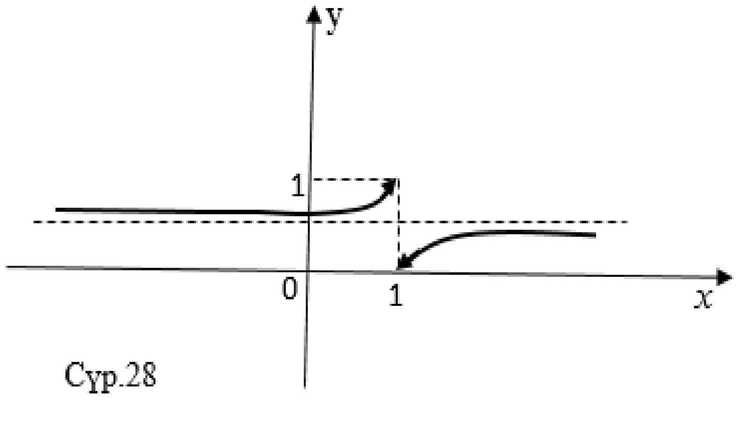
Чыгаруу. Бул функцияны татаал функция катары сүрөттөгө болот:

$y = \frac{1}{1+2^u}$, мында $u = \frac{1}{x-1}$.

Биринчи бөлчөктүн бөлүмү эч жерде нөлгө айланбайт. 1-теорема боюнча, $y = \frac{1}{1+2^u}$ функциясы u нын каалагандай маанисинде үзгүлтүксүз. $u = \frac{1}{x-1}$ функциясы $x = 1$ден башка xтин бардык маанилери үчүн үзгүлтүксүз. 3-теорема боюнча берилген татаал функция бардык $x \neq 1$ үчүн үзгүлтүксүз (дароо эле теоремадан алынган жогорудагы натыйжага таянсак да болмок).

$x \to 1$ сол жактан болгондо $x - 1 < 0$ жана, демек, $\frac{1}{x-1} \to -\infty$, ал эми

$2^{\frac{1}{x-1}} \to 0$, ошондуктан $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{1+0} = 1$. $x \to 1$ оң жактан болгондо $x - 1 > 0$ жана, демек, $\frac{1}{x-1} \to +\infty$ жана $2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty$, ошондуктан $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 0$.



Сүр.28

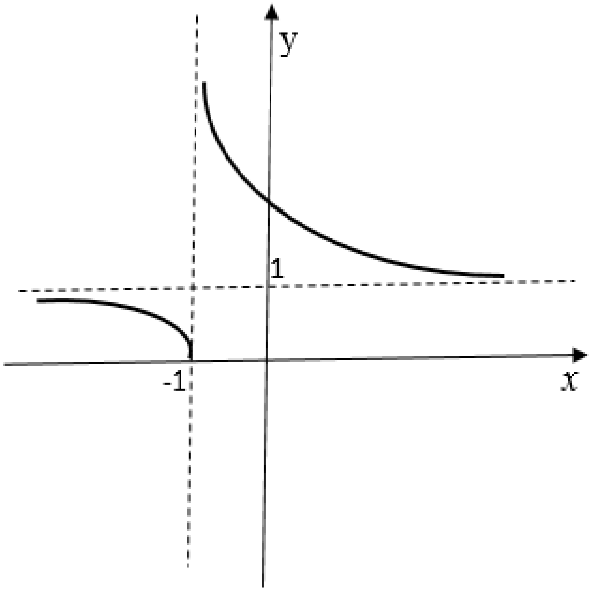
Ошентип, оң жана сол жаккы пределдер жашайт, бирок бирдей эмес, анткени $x_0 = 1$чекити биринчи түрдөгү үзүлүү чекити болот. Берилген функциянын графиги (Сүр.28) көрсөтүлгөн.

263. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн изилдегиле жана үзүлүү чекитин тапкыла.

Чыгаруу. Жогорудагы көрсөтүлгөн теоремалардын натыйжаларына ылайык, берилген функция $x_0 = -1$ чекитинен башка бардык жерде үзгүлтүксүз.Бул чекиттеги үзүлүүнүн мүнөзүн түшүндүрүш үчүн оң жана сол пределдерди табабыз:

$\lim\limits_{x \to -1-} e^{\frac{1}{x+1}} = 0$, анткени $\frac{1}{x+1} \to -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$, анткени $\frac{1}{x+1} \to +\infty$.

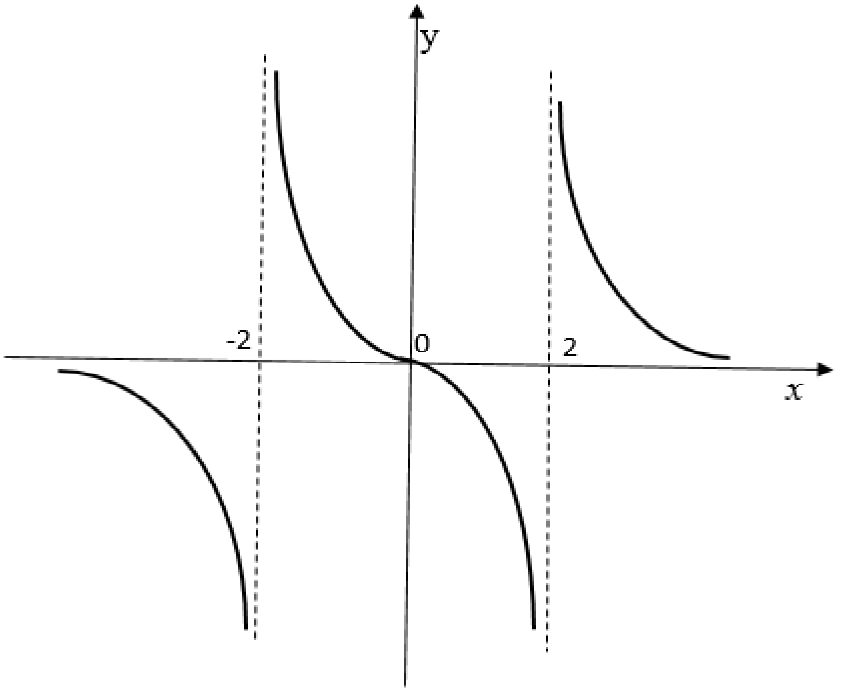
Демек, $x_0 = -1$чекити экинчи түрдөгү үзүлүү чекити болот, анткени оң жаккы предели чексиз (сүр.29).



Сүр.29

264. $y = \frac{x}{x^2-4}$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн изилдегиле жана үзүлүү чекитин тапкыла.

Чыгаруу. Бул функция бөлчөк-рационалдык болот, жана ошондуктан бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгон бардык чекиттерде үзгүлтүксүз.



Сүр.30

$x = \pm 2$ чекитинде функция аныкталган эмес, ошондуктан үзгүлтүктүү.Ушул эки чекитте тең бир жактуу пределдер чексиз экендигин текшерүү татаал эмес:

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x}{x^2-4} = -\infty,\ \lim_{x\to -2-}\frac{x}{x^2-4} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x}{x^2-4} = +\infty,\ \lim_{x\to -2+}\frac{x}{x^2-4} = +\infty.$$

Натыйжада, $x = \pm 2$ экинчи түрдөгү үзүлүү чекиттери. Бул функциянын графиги (Сүр.30) көрсөтүлгөн.

Төмөнкү функцияларды үзгүлтксүздүккө, үзүлүү чекиттерин табууну, жоюулуучу үзүлүү учурунда функцияны үзгүлтүксүздүккө чейин аныктоону изилдегиле:

265. $x_0 = 0$ чекитинде $y = \frac{tgx}{x}$.

266. $y = \begin{cases} x^3 + 1 & (x \neq 0), \\ -2 & (x = 0). \end{cases}$

267. $y = \frac{x-1}{|x-1|}$.

268. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$.

269. $y = \frac{1}{1+e^{1/x}}$.

270. $y = \frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$.

271. $y = \frac{1}{x-x^3}$.

272. $y = \frac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36}$.

БАП 2. ТУУНДУ ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 2.1. ЖӨНӨКӨЙ ФУНКЦИЯЛАРДЫН ТУУНДУЛАРЫ

1. Туундунун аныктамасы. $y = f(x)$ функциясынын x аргументи боюнча туундусу деп, функциянын өсүндүсүнүн көз каранды эмес өзгөрмөнүн өсүндүсүнө болгон катышынын, өзгөрмөнүн өсүндүсү нөлгө умтулгандагы предели аталат. $y = f(x)$ функциясынын туундусу y', же $f'(x)$ аркылуу белгиленет. Ошентип, аныктама боюнча

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Берилген $f(x)$ функциясынын $f'(x)$ туундусун табуу, функцияны дифференцирлөө деп аталат.

2.Таблицалык туундулар:

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ (1)

(α – каалагандай чыныгы сан)

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (2)

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ (3)

$(a^x)' = a^x \ln a$ (4)

$(e^x)' = e^x$ (5)

$(\sin x)' = \cos x$ (6)

$(\cos x)' = -\sin x$ (7)

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ (8)

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ (9)

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$ (10)

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$ (11)

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ (12)

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ (13)

(2)формуласы (1) формуласынын $\alpha = \frac{1}{2}$ болгондогу жекече учуру болоорун белгилей кетели. Дал ушундай эле (5) формуласы (4) формуласынын $a = e$ болгондогу жекече учуру.

3. Дифференцирлөөнүн негизги эрежелери:

$(C)' = 0$ (14)

$(u + v)' = u' + v'$ (15)

$(Cu)' = Cu'$ (16)

$(uv)' = u'v + uv'$ (17)

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$ (18)

(мында C – турактуу, ал эми u жана v туундуга ээ болуучу x тен функциялар).

273. $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ функциясынан туунду тапкыла.

Чыгаруу. (15) формуланын негизинде

$$y' = (5x^3)' - (2x^2)' + (3x)' - (4)'$$

алабыз. Андан ары (16) жана (14) формулаларын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$y' = 5(x^3)' - 2(x^2)' + 3(x)'.$$

Акырында, (1) формуласын колдонуп, акыркы жыйынтыкка келебиз:

$$y' = 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \text{ же } y' = 15x^2 - 4x + 3.$$

Мындан ары формулаларды колдонуп кыска жолдор менен чыгарсак да болот.

274. Эгерде $y = x^4 - 6x^2 + 8$ болсо, y' ти тапкыла.

Чыгаруу. $y' = 4x^3 - 12x$.

275. Эгерде $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}$ болсо, y' ти тапкыла.

Чыгаруу. Берилген туюнтманы бөлчөк жана тескери көрсөткүчтөрдү колдонуп жазабыз:

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-2}.$$

Мурдагы мисалдардагы формулаларды колдонуп

$y' = 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot (-2)x^{-3}$ алабыз, же кээ бир өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}.$$

276. $y = x^3 \cos x$ берилген. y' ти тапкыла.

Чыгаруу. Көбөйтүүнү дифференцирлөөнүн эрежеси (17) боюнча

$$y' = 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x) \text{ же } y' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

Бул жерде (1) жана (7) формулалары да колдонулду.

277. Эгерде $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$ болсо, y' ти тапкыла.

Чыгаруу. Бөлчөктү дифференцирлөөнүн эрежесин, (1) жана (12) формулаларды колдонуп табабыз

$$y' = \frac{x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x \cdot 3x^2}{x^6} \text{ же } y' = \frac{x - 3(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^4(1+x^2)}.$$

Төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла:

278. $y = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 6.$

279. $y = \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 7.$

280. $y = ax^2 + bx + c$

$(a, b, c -$ туруктуулар).

281. $y = x^n + nx^3 + 3n$

$(n-$туруктуу).

282. $y = \frac{\sqrt[7]{x^5} - x}{x^3}.$

Көрсөтмө. Туундуну тапкандан мурда, бөлчөктүн алымын бөлүмүнө мүчөлөп бөлүп, бөлчөктүк жана тескери көрсоткүчтөргө келтирүү.

283. $y = \left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)^3.$

Көрсөтмө. Айырманын кубунун формуласын колдонгула.

284. $y = \frac{(x+2)^2}{x^{3/2}}.$

285. $y = x \ln x - x.$

286. $y = e^x(x^2 - 2x + 2).$

287. $y = e^x(\sin x - \cos x).$

288. $y = x^3 \operatorname{ctg} x.$

289. $y = 3^x \arcsin x.$

290. $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x.$

291. $y = \frac{tgx}{\sqrt{x}}.$

292. $y = \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}.$

293. $y = \frac{\arccos x}{1-x^2}.$

§ 2.2. ТАТААЛ ФУНКЦИЯЛАРДЫН ТУУНДУЛАРЫ

1.Татаал функцияларды дифференцирлөө жөнүндө теорема. Мурдагы параграфтарда келтирилген дифференцирлөөнүн формулалары жана эрежелери эң жөнөкөй учурлардагы функциялардан туундуларды алууга мүмкүндүк берет. Бул эрежелерди жана формулаларды билүү көбүрөөк татаал түрдөгү функцияларды дифференцирлөө үчүн жетишсиз, мисалы $y = \sqrt{\cos x}$, $y = e^{\operatorname{arctg} x}$ ж.б.у.с. Бул учурларда

дифференцирлөөнүн жалпы формулалары функциянын функциядан туунду алуу жөнүндөгү теоремаларына негизделип колдонулат.

$y = f[\varphi(x)]$ – татаал функция, б.а. $y = f[u]$, ал эми $u = \varphi(x)$. Эгерде бири бирине дал келген x жана u маанилеринин $f'(u)$ жана $u' = \varphi'(x)$ туундулары жашаса, анда y тин x боюнча туундусу да жашайт жана

$$y' = f'(u)u'.$$

Бул катышты пайдаланып, дифференцирлөөнүн формулаларынын таблицасын алууга болот:

$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ (1) $\qquad (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ (8)

(α – каалагандай чыныгы сан)

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ (2) $\qquad (ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ (9)

$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ (3) $\qquad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, (10)

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ (4) $\qquad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, (11)

$(e^u)' = e^u \cdot u'$ (5) $\qquad (\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ (12)

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ (6) $\qquad (\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ (13)

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ (7)

(2) формуласы (1) формуласынын жекече учуру, ал эми (5) формуласы (4) формуласынын жекече учуру экендиги түшүнүктүү.

294. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$ функциясынын туундусун тапкыла.

Чыгаруу. Жардамчы u функциясын киргизебиз, $u = x^2 + 3x + 1$ деп белгилеп алабыз, анда

$y = \sqrt{u}$, мында $u = x^2 + 3x + 1$.

(2) формуласы боюнча

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x + 3),$$

ээ болобуз же ,аягында u ны анын мааниси менен алмаштырып:

$$y' = \frac{(2x + 3)}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}.$$

295. Эгерде $y = (x^2 + 5x + 7)^3$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. $u = x^2 + 5x + 7$ деп белгилеп алып, $y = (u)^3$ээ болобуз. (1) формуласы боюнча

$$y' = 3u^2(2x + 5),$$

$$\text{же } y' = 3(x^2 + 5x + 7)^2(2x + 5).$$

Мындай кеңири жазууну дифференцирлөөнү үйрөнүүдө башында колдонушат, көпчүлүк учурларда мындан ары жардамчы функцияны оюубузда жазабыз.

296. Эгерде $y = \ln(x^3 + 7x + 2)$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Бул учурда u деп (оюубузда) $x^3 + 7x + 2$ туюнтмасын кабыл алып жана (3) формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$y' = \frac{3x^2 + 7}{x^3 + 7x + 2}$$

297. Эгерде $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Бул учурда u деп $\operatorname{arctg} x$ түшүнөбүз. (3) формуласын колдонуп

$$y' = \frac{1}{\frac{1 + x^2}{\operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{(1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x}.$$

298. $y = e^{\arcsin x}$ функциясынын туундусун тапкыла.

Чыгаруу. Бул учурда u деп $\arcsin x$ түшүнөбүз жана (5) формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$y' = e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

299. Эгерде $y = \sin^3 x$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. $\sin^3 x$ белгилөөсү $\sin^3 x = (\sin x)^3$жазуусунун кыскачасы экендигин белгилей кетели. Ошентип, $y = (\sin x)^3$ функциясын дифференцирлөөгө туура келет. $\sin x$ ти u деп түшүнүп (1) формуласын пайдаланып, төмөнкүнү алабыз

$$y' = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x \text{ же } y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

300. Эгерде $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Алгач көбөйтүүнү дифференцирлөөнүн эрежеси боюнча ((17) формула § 1ди карагыла)

$$y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' \arcsin x + \sqrt{1-x^2}(\arcsin x)'.$$

$\sqrt{1-x^2}$ тан туунду алууда $1-x^2$ ты u деп кабыл алабыз.[(2) формуласы боюнча],

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

экендиги айкын.

Ошентип, $y' = \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ же $y' = 1 - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла:

301. $y = (x^2+1)^{10}$

302. $y = \sqrt[3]{ax^2+bx+c}.$

303. $y = e^{-x}.$

304. $y = \sin 3x.$

305. $y = \mathrm{tg}5x.$

306. $y = \ln \mathrm{tg}\, x.$

307. $y = 4^{\cos x}.$

308. $y = \sin(x^2+5x+1).$

309. $y = \cos^4 x.$

310. $y = \ln(x^2+3x+4).$

311. $y = \mathrm{tg}(x^2+1).$

312. $y = \arcsin\frac{1}{x}.$

313. $y = \mathrm{arcctg}\sqrt{x}.$

314. $y = \ln\left(1+\sqrt{x}\right).$

315. $y = (\arcsin 2x)^2.$

316. $y = \cos(\ln x).$

317. $y = \sqrt{e^x}.$

318. $y = \sqrt{1+\arcsin x}.$

319. $y = e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6).$

320. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

321. $y = \ln\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x.$

322. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}.$

323. $y = \sqrt{x}\cos^2 x.$

324. $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$

325. $y = \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \ln\cos x.$

326. $y = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$

327. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$

Эскертүү: 326 жана **327.** $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ туюнтмасы гиперболикалык синус деп аташат жана shx деп белгилешет, ал эми $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ гиперболикалык косинус деп аташат жана chx менен белгиленет.

$ch^2x - sh^2x = 1$ экендиги көрүнүп турат. $\frac{shx}{chx}$ катышы гиперболикалык тангенс деп аталат жана thx менен белгиленет.

326 жана **327** жооптору $(\text{sh}x)' = chx$ жана $(chx)' = shx$ экендигин көрсөтөт.Функциядан функциянын туундусу жөнүндөгү теореманы эске алып төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(sh\,u)' = chu \cdot u' \tag{14}$$

$$(ch\,u)' = shu \cdot u'. \tag{15}$$

Төмөнкү мисалдарды чыгарууда (14) жана (15) формулалар колдонулат.

328. $y = thx$.

329. $y = ch^2x + sh^2x$.

330. $y = x^2chx$.

331. $y = \frac{x}{ch\,x}$.

332. $y = \ln thx$.

333. $y = 2^{\text{sh}x}$.

2. Бир нече бөлүмдөрдөн турган татаал функцияларды дифференцирлөө. 1-пункттагы каралган дифференцирлөөгө караганда көбүрөөк татаал түрдөгү функцияларды дифференцирлөөгө туура келген учурлар да кездешет. Мисалы,

$$y = f(u),$$

мында u - v өзгөрүлмөдөн функция : $u = \varphi(v)$, жана v көз каранды эмес өзгөрүлмө x тан функцияны берет: $v = \psi(x)$. x боюнча эркин y тен же дагы көбүрөөк татаалдан туунду алууда, мурдагы учурдай эле 1-пункттагы келтирилген формулалар, а түгүл §1деги келтитилген дифференцирлөөнүн эрежелери колдонулат.

Мындан аркы келтирилген мисалдарда формулаларды жана диффренцирлөөнүн эрежелерин ар түрдүү татаал мисалдарды дифференцирлөөдө кантип колдонула тургандыгы көрсөтүлөт.

334. Эгерде $y = \ln \text{arctg}\sqrt{x}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. $\text{arctg}\sqrt{x}$ ти жардамчы функция катары кабыл алабыз жана (3) формуласын колдонобуз:

$$y' = \frac{(\text{arctg}\sqrt{x})'}{\text{arctg}\sqrt{x}}.$$

$\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ тен туунду алууда жардамчы функция катары $\sqrt{x}$ ти кабыл алабыз жана (12) формуланы колдонобуз:

$$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{1+x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Табылган $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'$маанини туюнтмадагы y'ке коюп, жыйынтык алабыз

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}.$$

Туундуларды эсептөөдө кээ бир көндүмдөрдө жазуулар кыска болушу мүмкүн, аны төмөнкү мисалдарда көрсөтөбүз.

335. Эгерде $y = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^4$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Бул учурда $\arcsin\sqrt{x}$ ти жардамчы функция катары кабыл алабыз жана (1) формуласын колдонобуз; андан кийин $\sqrt{x}$ ти жардамчы функция катары кабыл алабыз жана (10) формуласын пайдаланабыз:

$$y' = 4\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^3\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' = 4\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^3 \cdot \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= 4\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^3 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x-x^2}}.$$

336. Эгерде $y = 2^{\sqrt{x^2+3x+4}}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Алгач жардамчы функция катары $\sqrt{x^2+3x+4}$ ти кабыл алабыз жана көрсоткүчтүү функцияны дифференцирлөөнүн формуласын (4-формула) колдонобуз. Андан ары жардамчы функция катары x^2+3x+4 үч мүчөнү кабыл алып, (2) дифференцирлөөнүн формуласы колдонулат. Удаалаш төмөнкүнү алабыз

$$y' = 2^{\sqrt{x^2+3x+4}}\ln 2\left(\sqrt{x^2+3x+4}\right)'$$

$$= 2^{\sqrt{x^2+3x+4}}\ln 2\,\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+4}}.$$

Практикалык мисалдарды көбүрөөк чыгаргандан кийин туундуну табууда арасындагы бөлүмдөр түшүп калышы мүмкүн жана жооп дароо жазылат, ал төмөнкү мисалда көрсөтүлөт.

337. Эгерде $y = \ln \sin 5x$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу.

$$y' = \frac{1}{\sin 5x} \cos 5x \cdot 5 = 5ctg\, 5x.$$

338. Эгерде $y = \sin^3(x^2 + 3x + 1)$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. **299** мисалынын чыгарылышына айтылган эскертүүнү эске алабыз. (1) жана (6) формулаларын жана көп мучөнү дифференцирлөөнү колдонобуз:

$$y' = 3\sin^2(x^2 + 3x + 1) \cdot \cos(x^2 + 3x + 1) \cdot (2x + 3).$$

339. Эгерде $y = 3^{tg^4(x^2+5x)}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Буга чейинки мисалдарда туундуларды эсептөөдө удаалаш операциялар үч бөлүмдөр менен жүргүзулгөнүнө ээ болдук. Мисалы, 327 мисалды чыгарууда, алгач көрсөткүчтүү функциянын туундусун таап, андан кийин квадраттык тамырдан жана акырында көп мүчөнүн туундусун таптык. Көбүрөөк татаал мисалда бөлүмдөрдүн саны көп болушу мүмкүн, бирок туундуну табуу методикасы мурдагыдай эле болот.

Каралып жаткан мисалда алгач көрсоткүчтүү функцияны дифференцирлөөнүн формуласын (4-формула) колдонууга туура келет жана жардамчы функция u катары $tg^4(x^2 + 5x)$ кабыл алынат, андан кийин даражалуу функцияны дифференцирлөө формуласы (1-формула) жана жардамчы функция катары $tg(x^2 + 5x)$ кабыл алынат, андан ары тангенсти дифференцирлөө формуласын колдонобуз (жардамчы функция катары $(x^2 + 5x)$ кабыл алынат), акырында көп мүчөдөн туунду табабыз. Бул кеңири жазуудан төмөнкүгө ээ болобуз:

$y' = 3^{tg^4(x^2+5x)} \ln 3[tg^4(x^2 + 5x)]' = 3^{tg^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4\, tg^3(x^2 + 5x) \cdot [tg(x^2 + 5x)]' = 3^{tg^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4\, tg^3(x^2 +$

$5x)\frac{1}{cos^2(x^2+5x)}(x^2+5x)' = 3^{tg^4(x^2+5x)}\, ln\,3\cdot 4\,tg^3(x^2+$
$5x)\frac{1}{cos^2(x^2+5x)}(2x+5).$

Жетишерлик көндүмдөргө ээ болгондон кийин дароо эле жазса болот

$$y' = 3^{\mathrm{tg}^4(x^2+5x)}\ln 3\cdot 4\,tg^3(x^2+5x)\frac{1}{cos^2(x^2+5x)}(2x+5).$$

340. Эгерде $y = \mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу.

$$y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = (1-x^2)\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла:

341. $y = \ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}.$

342. $y = 4^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}}.$

343. $y = \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^5.$

344. $y = tg^4(x^2+1).$

345. $y = e^{\arcsin\frac{1}{x}}.$

346. $y = tg^3 2x\cdot cos^2 2x.$

347. $y = \frac{\sin^3 x}{1+2^{x^2}}.$

348. $y = \arcsin\left(e^{x^2}\right).$

Көрсөтмө. Дифффеpенциpлөөдөн алынган жоопту өзгөртүп түзүп алымын жана бөлүмүн өзгөртүп x^2+1 ге көбөйтүү керек.

349. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right).$

350. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}.$

351. $y = \ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}.$

352. $y = \frac{cos^2 3x}{\sin^3 3x}.$

353. $y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}.$

354. $y = \ln\sin\frac{2x+4}{x+1}.$

355. $y = \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}.$

356. $y = \ln\ln\mathrm{tg}x.$

357. $y = \mathrm{arctg}\frac{(1-x^2)x\sqrt{5}}{x^4-3x^2+1}.$

358. $y = -\frac{2(2x+3)}{5\sqrt{x^2+3x+1}}.$

359. $y = \mathrm{sh}^4(x^2+2x+1).$

360. $y = 4^{\mathrm{ch}^3 x}.$

361. $y = \ln\ thx.$

Көрсөтмө. **359**,**360, 361** ни чыгарууда **326** жана **327**ге берилген эскертүүнү эске алуу керек.

3. **Логарифмалык дифференцирлөө.** Кээде берилген туюнтмадан туунду алуудан мурда дифференцирлөө процессин жөнөкөйлөтүш үчүн алдын ала аны эсеп менен өзгөртүп түзүү максаттуу болот. Көпчүлүк учурда ,эгерде көбөйтүүнүн, бөлчөктүн, даражанын же тамырдын логарифмасынан туунду алуу керек болсо, логарифмалоонун кадимки эрежелерин колдонуп, алдын ала өзгортүп түзүүлөрдү жүргүзүү керек болот. Көпчүлүк учурларда берилген функцияны дифференцирлөөдөн мурда, анын логарифмин алып, андан кийин бул логарифмадан туунду аныктап жана логарифмадан алынган туунду боюнча берилген функциянын туундусун издөө ыңгайлуу болот. Мындай ыкма логарифмалык дифференцирлөө ыкмасы деп аталат.

Логарифмалык дифференцирлөө ыкмасы $y = u^v$ түрүндөгү татаал функциядан (мында u жана v аргумент x тен функциялар) туундуну оңой алууга мүмкүнчүлүк берет. Чындыгында, берилген барабардыктын эки бөлүгүн тең логарифмалап төмөнкүнү алабыз

$$\ln y = v \ln u.$$

Акыркы катышты дифференцирлеп

$$\frac{y'}{y} = v\frac{u'}{u} + v' \ln u.$$

Барабардыктын эки бөлүгүн y ке көбөйтүп жана y ти u^v аркылуу алмаштырып, аягында айрым өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин төмөнкүнү алабыз

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'. \qquad (16)$$

$y = u^v$функциясынан туунду алууда логарифмалык дифференцирлөө ыкмасын колдонуу керек же азыр эле алынган (16) формуласын колдонуу керек.

Айтылгандарды көрсөтүүчүү мисалдарды карайлы.

362. Эгерде $y = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. $y = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{5}{6}}$.
Дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз

$$y' = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}.$$

363. Эгерде $y = \sqrt{1 + \sin 2x}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. $y = \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + cos^2 x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \sin x + \cos x$.

Дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз

$$y' = \cos x - \sin x.$$

364. Эгерде $y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Алдын ала өзгөртүп түзүү жүргүзөбүз:

$$y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{8}\ln(x^2+1).$$

Андан ары табабыз

$$y' = \frac{3}{4x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{x}{4(x^2+1)}.$$

365. Эгерде $y = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Берилген барабардыктын эки жагын тең логарифмалайбыз:

$$\ln y = 3\ln x + 4\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1) =$$

$$= \frac{5}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1) + 4\ln(x^2+1).$$

Алынган катышты дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{(x^2+1)}$$

Акыркы барабардыктын эки жагын тең y ке көбөйтүп жана y ти $\frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$ ке алмаштырып, төмөнкүнү алабыз

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}\left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{(x^2+1)}\right).$$

366. Эгерде $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}$ болсо, y'ти тапкыла.

Чыгаруу. Логарифмалык дифференцирлөө ыкмасын колдонобуз:

$\ln y = x^3 \ln \mathrm{ctg}\, x;$

$\frac{y'}{y} = -x^3 \frac{1}{\mathrm{ctg}\, x \cdot \sin^2 x} + 3x^2 \ln \mathrm{ctg}\, x = 3x^2 \ln \mathrm{ctg}\, x - \frac{x^3}{\sin x \cos x};$

$y' = (\mathrm{ctg}\, x)^{x^3}\left(3x^2 \ln \mathrm{ctg}\, x - \frac{x^3}{\sin x \cos x}\right).$

Төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла:

367. $y = \sqrt[4]{x^3 \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}.$

368. $y = \sqrt{\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}}.$

369. $y = \ln\sqrt{1 + ctg^2 x}.$

370. $y = \ln\frac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}}.$

371. $y = \ln\frac{x^3-9}{x^3-1}.$

372. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}.$

373. $y = x^6(x^2+1)^{10}(x^3+1).$

374. $y = \sqrt[3]{\frac{(x^2+1)x}{\sin^2 x}}.$

375. $y = e^{x^2} tg^3 x \cdot \arcsin x.$

376. $y = \ln\frac{\sqrt{5}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}.$

377. $y = \ln\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}.$

378. $y = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

379. $y = x^x.$

380. $y = x^{\sin x}.$

381. $y = (\cos x)^{\mathrm{arctg}\, x}.$

382. $y = (x^2+3)^{\sqrt{x}}$.

383. $y = (1+x^2)^{\arccos x}.$

384. $y = \sqrt[x]{\mathrm{arctg} x}.$

§ 2.3. ТУУНДУНУН САНДЫК МААНИСИ. ТУУНДУНУ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ЖАНА МЕХАНИКАЛЫК ЧЕЧМЕЛӨӨ

1. Туундунун сандык мааниси. $y = f(x)$ функциясынын туундусу, x тен функцияны бере тургандыгы бизге белгилүү. Көптөгөн мисалдарды чыгарууда берилген чекитте туундунун б.а. аргументтин берилген маанисинде сандык маанисин алуу керек болот. Кадимки туундунун сандык маанинсин издөө эч кандай кыйынчылык жаратпайт: бул маселени чечүү үчүн туундунун жалпы туюнтмасына аргументтин дал келген маанисин коюуу

жетиштүү. Бирок, берилген чекитте туундунун маанисин табуу үчүн туундунун аныктамасынын өсүндүлөрдүнүн катышынын пределинен тышкары учурлар да кездешет (§1.кара); бул учурларда дифференцирлөөнүн техникалары колдонулбай калышы мүмкүн.

Мындан ары туундунун сандык маанилерининин аныктоодо, жөнөкөй жана көбүрөөк татаал учурларда бир нече мисалдар келтирилет.

385. Эгерде $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 2$ болсо, $f'(1)$ти тапкыла.

Чыгаруу. Берилген функциянын туундусун табабыз:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 8.$$

Туундунун туюнтмасындагы x тин ордуна 1 санын койобуз:

$$f'(1) = 3 \cdot 1 - 10 \cdot 1 + 8 = 1.$$

386. Эгерде $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \quad , \quad x = 0. \end{cases}$ **,** $f'(0)$дү тапкыла.

Чыгаруу. $x^2 \sin\frac{1}{x}$ туюнтмасы, бул туюнтманын туундусу $x = 0$ болгондо мааниге ээ эмес. $f'(0)$ дү түздөн-түз туундунун аныктамасын колдонуп эсептейбиз. Бул аныктамага ылайык

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

мында h - аргументтин өсүндүсү. $x = 0$ болгондо

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Бул учурда

$$f(h) = h^2 \sin\frac{1}{h}\ ;\ \ f(0) = 0.$$

Ошентип,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

387. Эгерде $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 9}$ **,** $f'(3)$дү тапкыла.

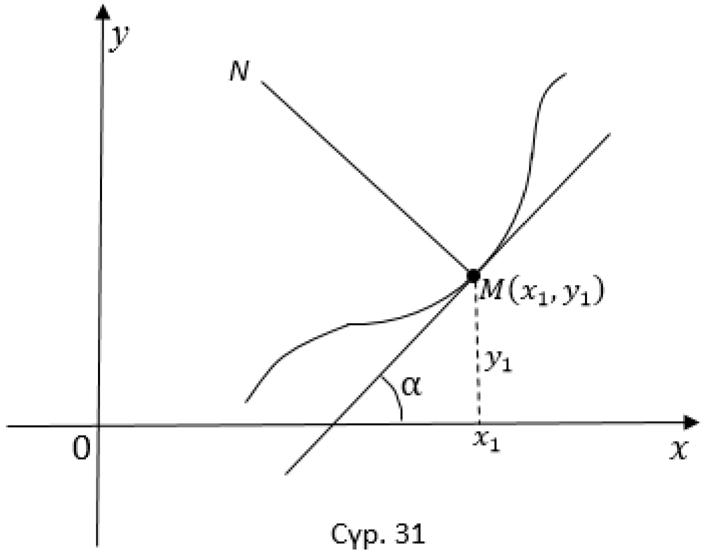
388. Эгерде $f(x) = \ln(1 + 2^x)$ **,** $f'(2)$ ни тапкыла.

389. Эгерде $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ **,** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ тү тапкыла.

390. Эгерде $f(x) = \ln \sin x$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ тү тапкыла.

391. Эгерде $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1}, x \neq 1 \\ 0 \quad , \quad x = 1. \end{cases}$, $f'(1)$ди тапкыла.

2. Туундунун геометриялык мааниси. $y = f(x)$ – кээ бир ийрилердин теңдемеси болсун дейли, ал эми $M(x_1, y_1)$- чекити ушул ийриде жатат (сүр. 31), анда $y_1 = f(x_1)$. $x = x_1$ болгондо $f(x)$ функциясынын туундусунун мааниси, $M(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өтүүчү берилген ийриге жаныманын бурчтук коэффициентине барабар. Башкача айтканда, $f'(x_1) = \text{tg}\alpha$, α - M чекити аркылуу өтүүчү жана абсцисса огунун оң багыты менен ийриге жүргүзүлгөн жаныманын арасындагы бурч (сүр.31кара).



Сүр. 31

$M(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өтүүчү, берилген $y = f(x)$ ийрисине жаныманын теңдемесинин түрү

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \qquad (1)$$

Берилген ийринин $M(x_1, y_1)$ чекитинде MN нормалы деп, жаныма чекити аркылуу өткөн ийриге перпендикуляр аталат. Нормалдын теңдемеси төмөнкүдөй жазылат:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1). \qquad (2)$$

Туундунун геометриялык маанисине көрсөтмө аналитикалык геометриянын кээ бир маселелерин жеңил чыгарууга жардам берет.

392. Жаныманын теңдемесин жана $y = x^3 + 2x$ ийрисинин $M(1{,}3)$ чекитиндеги нормалын тапкыла.

Чыгаруу. Жаныманын бурчтук коэффициентин аныкташ үчүн берилген функциядан туунду табабыз:

$$y' = 3x^2 + 2.$$

$M(1,3)$ чекитиндеги туундунуун мааниси изделүүчү буртук коэффициент

$k = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ берет.

Ошентип, жаныманын теңдемеси

$$y - 3 = 5(x - 1) \text{ же } 5x - y - 2 = 0,$$

ал эми нормалдын теңдемеси

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1), \text{ же } x + 5y - 16 = 0.$$

393. $y = x^2 - x$ параболасы абсцисса огун кандай бурчта кесип өтөөрүн аныктагыла.

Чыгаруу. $y = x^2 - x$ ийрисинин жана Ox огунун кесилишинин абсцисса чекиттерин $y = 0$ теңдемеси болгондо табабыз. Эки теңдемени биргелешип чыгарып, $x^2 - x = 0$ алабыз, мындан изделүүчүү чекиттердин абсциссасы

$x = 0$ жана $x = 1$ болоорун табабыз.

Ийринин астындагы бурчтун Ox огу менен болгон бурчу деп, дал келүүчү чекитте абсцисса огу менен бул ийриге жаныма түшүндүрүлөт. Коюлган маселени чыгарыш үчүн $x = 0$ жана $x = 1$ абсцисса чекиттеринде жанымалардын параболага бурчтук коэффициенттерин табуу керек.

$y = x^2 - x$ функциясынын туундусу $y' = 2x - 1$. Түздөн түз (0,0) жана (1,0) чекиттери аркылуу өткөрүлгөн, параболага жаныма менен абсцисса огунда түзүлгөн бурчтарды α_1 жана α_2 деп белгилеп

$tg\alpha_1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ жана $tg\alpha_2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ ээ болобуз,

анда $\alpha_1 = 135^\circ$ жана $\alpha_2 = 45^\circ$.

394. $M(1,5)$ чекитиндеги $y = x^2 + 5x - 1$ ийрисине жаныманын теңдемесин тапкыла.

395. $M(1,0)$ чекитиндеги $y = \frac{\ln x}{x}$ ийрисине жаныманын теңдемесин тапкыла.

396. $M(1,3)$ чекитиндеги $y = x^2 + 2$ ийрисине жаныманын теңдемесин тапкыла.

397. Жаныманын теңдемесин жана $y = \frac{3x-4}{2x-3}$ ийрисине $M(2,2)$ чекитиндеги нормалын тапкыла.

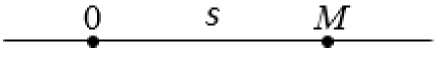
398. Жаныманын теңдемесин жана $y = 2\sqrt{2}\,\sin x$ ийрисине $M\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ чекитиндеги нормалын тапкыла.

399. $y = \frac{x-1}{1+x^2}$ ийриси абсцисса огун кандай бурчта кесип өтөөрүн аныктагыла.

400. $y = \sin x$ синусоида координата башталышында абсцисса огун кандай бурчта кесип өтөөрүн аныктагыла.

401. Кандай чекитте $y = x^2 + 3x - 5$ параболасына жаныма $7x - y + 3 = 0$ түз сызыгына параллель экендигин аныктагыла.

3. Туундунун механикалык мааниси. Берилген чекитте функциянын туундусунун мааниси бул чекиттеги функциянын ылдамдыгынын өзгөрүшүн көз каранды эмес өзгөрүлмөнүн өсүшүнүн ылдамдыгы менен салыштырууну мүнөздөйт.Ушул эскертүүнү эске алып, ар түрдүү процесстердеги ылдамдыкты аныктоодо туунду түшүнүгүн колдонууга болот. Жөнөкөй мисал катары M чекитинин түз сызык боюнча кыймылын карайбыз, анда s аркылуу 0 эсептин башталышынан кыймылдоочу чекитке чейинки аралыкты карайбыз (сүр.32).



Сүр.32

Убакыттын ар бир t моментине s тин аныкталган мааниси туура келет, ошентип s чоңдугу убакыттын функциясы болот: $s = f(t)$.

s тен t боюнча туунду, б.а. $s' = f'(t)$ чекиттин кыймылынын түз сызык боюнча ылдамдыгы v, анда $v = s'$. Мындан ары айтылгандарды көрсөтүүчү эң жөнөкөй мисалдар келтирилет.

402. $y = x^2 - 2x + 5$ ийрисинде абсциссага караганда ордината төрт эсе тезирээк өскөн чекитти тапкыла.

Чыгаруу. Берилген функциядан туунду табабыз:

$$y = 2x - 2.$$

Ошентип, туунду абсциссанын өсүшү (аргументтин) менен салыштырмалуу ординатанын өсүшүнүн (функциянын) ылдамдыгын мүнөздөйт, анда $2x - 2 = 4$ шарты изделүүчү чекиттин $x = 3$ абсциссасын аныктайт, ал эми ордината $y = x^2 - 2x + 5$ ийрисинин теңдемесинен x ти 3 кө алмаштыруудан табылат: $y = 8$.

403. Чекит түз сызык боюнча кыймылдайт жана эсептин башталышынан (метр менен өлчөнгөн) s аралыгы $s = t^2 + 2t + 3$ формуласы менен аныкталат, мында t – убакыт(секунда менен өлчөнгөн). Чекиттин кыймылынын ылдамдыгын бешинчи секунданын аягында аныктагыла.

Чыгаруу. v чекиттин кыймылынын ылдамдыгы s жолдун t убакыт боюнча туундусу катары аныкталат.Берилген учурда $v = 2t + 2$. Алынган туюнтма чекиттин кыймылынын ылдамдыгы үчүн жалпы формуланы берет.

Бешинчи секунданын аягында чекиттин кыймылынын ылдамдыгын аныкташ үчүн туюнтмагагы v үчүн t нын ордуна бешти коюуу керек;

$$v_5 = 12 \text{ м/сек.}$$

404. x тин кандай маанисинде $y = \frac{x^2}{2}$ ийрисинин ординатасы $y = \ln x$ ийрисинин ординатасына караганда төрт эсе тез өсөт?

405. Боштукта эркин түшүүчү тело аркылуу өткөн жол $s = \frac{gt^2}{2}$ формуласы менен аныкталат. Убакыттын баштапкы моментинде тело эсептөөнүн башталышында жайланышат деп эсептеп жана баштапкы ылдамдык нөлгө барабар; g – оордук күчүнүн ылдамдануусу. Эркин түшүүчү телонун ылдамдыгынын өзгөрүү законун чыгаргыла.

406. Шардын радиусу 10 см/сек. бирдей ылдамдыкта өсөт. Анын радиусу 100 см. барабар болгон моментте шардын көлөмү кандай ылдамдык менен өсөт?

§ 2.4. ФУНКЦИЯНЫН ДИФФЕРЕНЦИАЛДАРЫ

1. Дифференциалдарды эсептөө. $y = f(x)$ функциясынын дифференциалы dy деп, бул функциянын туундусунун көз каранды эмес өзгөрүлмөнүн өсүндүсүнө болгон көбөйтүндүсү аталат, б.а. $dy = f'(x)\Delta x$.

Көз каранды эмес өзгөрүлмөнүн дифференциалы dx, аныктама боюнча көз каранды эмес өзгөрүлмөнүн өсүндүсүнө Δx ке барабар, ошондуктан

$$dy = f'(x)dx, \tag{1}$$

б.а. функциянын дифференциалы функциянын туундусунун көз каранды эмес өзгөрүлмөнүн дифференциалына болгон көбөйтүндүсүнө барабар.

(1) формуласынан туундунун эки дифференциалдын катышы экендиги келип чыгат

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Туундунун бул белгилеринде y' жана $f'(x)$ белгилери дайыма бирге колдонулат.

(1) формуласы функциянын дифференциалын табыш үчүн бул функциянын туундусун табуу жана алынган туюнтманы dx ке көбөйтүү жетиштүү экендигин көрсөтөт. Ошентип, дифференциалды эсептөө техникасы туундуну табуунун техникасына келтирилиши мүмкүн.

Дифференциалды табуу операциясы, туундуну табуу операциясындай эле дифференцирлөө деп аталат. Бирок, дифференциалдарды алдын- ала туундуну таппай эле түздөн- түз туунду үчүн берилген таблицалык формулаларды жан эрежелерди колдонуп эсептөөгө болоорун белгилей кетүү керек.

Чындыгында эле (1) формуласын колдонуп, төмөнкү элементардык функциялардын дифференциалдарынын таблицасын түзүү татаал эмес:

$d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx$ (2) $d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x},$ (9)

(α – каалагандай чыныгы сан)

$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ (3) $d(ctgx) = -\frac{dx}{\sin^2 x},$ (10)

$d(\ln x) = \frac{dx}{x};\ (x > 0),$ (4) $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ (|x| < 1)$ (11)

$d(a^x) = a^x \ln a\, dx,$ (5) $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ (|x| < 1)$ (12)

$d(e^x) = e^x dx,$ (6) $d(arctg\, x) = \frac{dx}{1+x^2}$ (13)

$d(\sin x) = \cos x dx$ (7) $d(\mathrm{arcctg}\, x) = -\frac{dx}{1+x^2}$ (14)

$d(\cos x) = -\sin x dx,$ (8)

Дифференциалдарды табуунун негизги эрежелери

(алар туундуну эсептөөнүн негизги эрежелерине окшош)

$d(C) = 0,$ (15) $d(uv) = udv + vdu$ (18)

$d(u \pm v) = du \pm dv,$ (16) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}$ (19)

$d(Cu) = Cdu,$ (17)

(мында C – турактуу, ал эми u жана v туундуга ээ болуучу x тен функциялар).

Эми $y = f(u)$ функциядан функция берилсин, мында u - x аргументинен функция. Функциядан функцияны дифференцирлөө эрежеси боюнча жана дифференциалдын аныктамасы боюнча,

$$dy = f'(u)u'dx.$$

Бирок $u' = \frac{du}{dx}$, ошондуктан $dy = f'(u)\frac{du}{dx}dx,$ же

$$dy = f'(u)du. \qquad (20)$$

$f(u)$ дифференциалы жайгашкан (20) формуласы, $f(x)$ дифференциалы аныкталган (1) формуласындай эле түргө ээ. Дифференциалдын бул касиет x аргументинен $f(x)$ функциясы же функциядан функция $f(u)$ берилеби, андан көз каранды болбой

өзүнүн өзгөрбөгөн формасын сактаган касиети, инварианттуулук касиети деп аталат.

Туунду (дифференциалдан айырмаланып) инварианттулук касиетке ээ эмес. Чындыгында, эгерде

$$y = f(x), \text{ анда } y' = f'(x),$$

эгерде

$$y = f(u), \text{ анда } y' = f'(u)u'.$$

Дифференциалдын инварианттулук касиетин эске алып, татаал функциялардын дифференциалдарынын таблицасын түзүүгө болот:

$d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1}du$ (21)

(α – каалагандай чыныгы сан)

$d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, (22)

$d(\ln u) = \frac{du}{u}$, (23)

$d(a^u) = a^u \ln a\, du$, (24)

$d(e^u) = e^u du$, (25)

$d(\sin u) = \cos u\, du$, (26)

$d(\cos u) = -\sin u\, du$, (27)

$d(tg\, u) = \frac{du}{\cos^2 u}$, (28)

$d(ctg\, u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$, (29)

$d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, (30)

$d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, (31)

$d(\text{arctg}\, u) = \frac{du}{1+u^2}$, (32)

$d(\text{arcctg}\, u) = -\frac{du}{1+u^2}$. (33)

Төмөнкү мисалдарда берилген функциялардан дифференциалдарын тапкыла.

407. $y = (1 + tgx)^8$.

Чыгаруу. 1-ыкма. Берилген функциядан туунду табабыз:

$$y' = 8(1 + tgx)^7 \frac{1}{\cos^2 x},$$

мындан, дифференциалдын аныктамасы боюнча

$$dy = 8(1 + tgx)^7 \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

2-ыкма. (21) жана (28) формулаларын колдонуп, түздөн-түз дифференциалды табабыз:

$$dy = 8(1 + tgx)^7 d(1 + tgx) = 8(1 + tgx)^7 \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

408. $y = \ln \operatorname{arctg}(\sin x)$.

Чыгаруу. (23), (32) жана (26) формулаларын удаалаш колдонуп, дифференциалды түздөн-түз эсептейбиз:

$$dy = \frac{d[\operatorname{arctg}(\sin x)]}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = \frac{\frac{1}{1+\sin^2 x} d(\sin x)}{\operatorname{arctg}(\sin x)}$$

$$= \frac{\cos x dx}{(1+\sin^2 x)\operatorname{arctg}(\sin x)}.$$

Бир нече көндүмдөрдөн кийин жазууну кыскартып, акыркы жоопту дароо жазганга мүмкүн болот.

Төмөнкү мисалдарда **448**-мисалдай алдын-ала туундусун таппай, дифференциалдарды эсептегиле.

409. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

410. $y = (\arcsin x)^5$.

411. $y = 2^{tg^2 x}$.

412. $y = \sqrt{1+\sin^2 x}$.

413. $y = x^3 \ln x$.

414. $y = \operatorname{ctg}^5(x^3 + x^2)$.

415. $y = \cos^2 \sqrt{x}$.

416. $y = \sqrt{1+\operatorname{arctg} x}$.

417. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

418. $y = \sqrt[3]{(2+\cos x)^2}$.

419. $y = \arccos\ (2^x)$.

420. $y = (1+x^2)\operatorname{arcctg} x$.

1. Жакындаштырып эсептөөлөргө дифференциалдын колдонулушу. $y = f(x)$ функциясынын дифференциалы dy , бул функциянын өсүндүсү Δx салыштырмалуу сызыктуу болгон башкы бөлүктү берет. Башкача айтканда, Δy өсүндүсү дифференциалдын катышы менен байланыштуу

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x \text{ , же } \Delta y = dy + \varepsilon\Delta x,$$

мында $\Delta x \to 0$ болгондо $\varepsilon \to 0$.

Ошентип, өсүндү менен функциянын дифференциалынын айырмасы жогорку тартиптеги чексиз кичине, ошондуктан

$$f'(x) \neq 0 \text{ болгондо } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1,$$

б.а. функциянын өсүндүсү жана анын дифференциалы – чексиз кичине эквиваленттүүлөр. Мындан кичине Δx те жакындаштырылган барабардык орун алат

$$\Delta y \approx dy,$$

же

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \qquad (34)$$

(34) катышы көпчүлүк учурларда жакындаштырып эсептөөлөрдө колдонулат.

421. $|\Delta x|$ ти x менен салыштыруунун кичине шартында

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \qquad (35)$$

жакындаштырылган формуланы чыгаргыла.

Чыгаруу. Берилген учурда $f(x) = \sqrt{x}$, ошондуктан

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}\ , f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

алынган туюнтмаларды (34) формуласына коюп, изделүүчү жакындаштырылган формуланы алабыз.

422. α кичине болгондо, $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$ экендигин көрсөткүлө.

Чыгаруу. (35) формуласында $x = 1$ деп алабыз жана Δx ти α аркылуу белгилейбиз.

423. $\sqrt[3]{26{,}19}$ жакындаштырылган маанисин тапкыла.

Чыгаруу. Берилген учурда $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$x = 27$, $\Delta x = -0{,}81$ деп алабыз жана (34) формуланы колдонуп төмөнкүнү алабыз

$$\sqrt[3]{26{,}19} = \sqrt[3]{27-0{,}81} \approx \sqrt[3]{27} - \frac{0{,}81}{3\sqrt[3]{27^2}} = 3 - \frac{0{,}81}{3\cdot 9},$$

акырында

$$\sqrt[3]{26{,}19} \approx 3 - 0{,}03 = 2{,}97.$$

424. $x = 1$ абсциссасы менен чекитте өткөн $y = (2/3)x^5 - (1/9)x^3$ ийрисине жүргүзүлгөн жаныма абсцисса огу менен кандай бурчту түзөт?

Чыгаруу. Туундусун табабыз $y' = (10/3)x^4 - (1/3)x^2$; $x = 1$ болгондо $y' = 3$, б.а. $tg\alpha = 3$, мындан $\alpha \approx 71^0 34'$

425. Чекиттин түз сызыктуу кыймылда басып өткөн жолдун убакыттан көз карандылыгы $s = t^5/5 + (2/\pi)\sin(\pi t/8)$

теңдемеси менен берилген (t – секунда менен, s – метр менен). Экинчи секунданын акырындагы кыймылдын ылдамдыгын аныктагыла.

Чыгаруу. Басып өткөн жолдун убакыт боюнча туундусун табабыз:

$$\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8}.$$

$t = 2$ бологндо $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8}\sqrt{2} \approx 16{,}18$. Демек, $v \approx 16{,}18$ м/с.

426. Чекит $y = x(8 - x)$ параболасы боюнча абсциссасы t убактысынан көз каранды өзгөргөн $x = t\sqrt{t}$ (t – секунда менен, x – метр менен) закону боюнча кыймылдайт. $M(1; 7)$ чекитинде ординатанын өзгөрүү ылдамдыгы кандай болот?

Чыгаруу. Ординатанын өзгөрүү законун табабыз; параболанын теңдемесиндеги x ти $t\sqrt{t}$ га алмаштырып, $y = 8\,t\sqrt{t} - t^2$ алабыз.Ординатанын өзгөрүү ылдамдыгы ординатанын убакыт боюнча туундусу болот: $y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2$. $M(1; 7)$ чекити үчүн t мааниси 1 ге барабар. Демек, $y'_t = 9$, б.а. ординатанын өзгөрүү ылдамдыгы 9 м/с.

427. $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ жакындаштырылган формуланы чыгаргыла ($|\Delta x|$ ти x менен салыштыруунун кичине шартында).

428. $\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ жакындаштырылган формуланы чыгаргыла ($|\Delta x|$ ти x менен салыштыруунун кичине шартында).

429. α кичине болгондо, $\sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$ экендигин көрсөткүлө.

430. $\sqrt[4]{16{,}64}$ жакындаштырылган маанисин тапкыла.

431. $\sqrt{8{,}76}$ жакындаштырылган маанисин тапкыла.

432. $\ln 0{,}9$ жакындаштырылган маанисин тапкыла.

433. $\sin 29^\circ$ жакындаштырылган маанисин тапкыла.

Көрсөтмө. Бурчтун радиандык ченине өтүү керек, 1°ты $\frac{\pi}{180}$ ге алмаштырып, ал эми 30° ты $\frac{\pi}{6}$ га алмаштырабыз.

434. Басып өткөн жолдун убакыттан көз карандылыгы $s = t\ln(t+1)$ теңдемеси менен берилген (t – секунда менен, s – метр менен). Экинчи секунданын акырындагы кыймылдын ылдамдыгын тапкыла.

435. $y = x^3$ кубдук параболасы боюнча ординатасы t убактысынан көз карандылыкта өзгөргөн ордината $y = at^3$ закону боюнча чекит кыймылдайт. Убакыттан көз карандылыкта болгон абсциссанын өзгөрүү ылдамдыгы кандай болот?

§ 2.5. ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ ТУУНДУЛАР ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛДАР

1. Жогорку тартиптеги туундулар. Берилген $y = f(x)$ функциясынын экинчи тартиптеги туундусу же жөн эле экинчи туундусу деп, анын туундусунан $y' = f'(x)$ алынган туунду аталат. Экинчи туундуну белгилөө үчүн y'' же $f''(x)$ символдорун колдонушат. Ушуга окшош эле, үчүнчү тартиптеги туунду же берилген функциянын үчүнчү туундусу деп, анын экинчи туундусунан алынган туунду аталат. Үчүнчү туунду мындай белгиленет: y''' же $f'''(x)$.

Жалпысынан айтканда n-тартиптеги туунду же функциядан n- туунду деп, анын (n-1) – туундусунан алынган туунду аталат. n-тартиптеги туунду үчүн $y^{(n)}$ же $f^{(n)}(x)$ белгилери кабыл алынган. Ошондой эле төртүнчү тартиптеги туунду $y^{(4)}$ же $f^{(4)}(x)$ белгиленет; бешинчи тартиптеги туунду - $y^{(5)}$ же $f^{(5)}(x)$ белгиленет ж.б.у.с. (алгачкы үч тартиптеги туундулар башында берилген белгилер менен белгиленет).

Жогорку тартиптеги туундулардын аныктамасынан n-тартиптеги туундуну алуу үчүн, алдын-ала ага чейинки бардык туундуларды (n-1) – туундуну кошо табуу керек. Мисалы,

төртүнчү тартиптеги туундуну табуу үчүн биринчи тартиптеги туундусун, андан кийин экинчи туундусун, акырында үчүнчү туундусун таап, андан кийин коюлган маселени чечүүгө киришүүгө болот. Жеке өзгөчө учурларда n-тартиптеги туунду үчүн жалпы формуланы табууга болот жана анда бардык ага чейинки туундуларды эсептөө зарылчылыгы жоголот.

Төмөндө жогорку тартиптеги туундуларды табууда төмөнкү тартиптеги бардык туундуларды эсептөө зарыл болгон учурда , n-тартиптеги туунду үчүн жалпы формуласы түзүлгөн мыйзам ченемдүүдүлүктү табууга болот.

u жана v эки функциянын көбөйтүндүсүнүн n-тартиптеги туундусун эсептөөдө Лейбництин формуласын колдонуу максатуу болот

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}. \quad (1)$$

Бул формуладагы коэффициенттер Ньютондун биномундагы ажыроодогудай эле болот.

Биринчи туундуну кароодо, анын геометриялык жана механикалык чечмелөөлөрүнүн суроолору каралган. Экинчи туундунун ролу $y = f(x)$ функциясынын графигин түзүүдө 6-главада кеңири түшүндүрүлөт. Экинчи туундунун механикалык мааниси, эгерде биринчи туунду кээ бир процесстердин ылдамдыгы катары чечмеленсе, анда экинчи туунду ошол процесстин ылдамдануусун мүнөздөйт. Мисалы, 0 эсептин башына чейин түз сызык менен кыймылдаган чекиттен аралыкты s аркылуу белгилейбиз. s чоңдугу t убактысынан функция экендиги айкын, б.а. $s = f(t)$. Чекиттин ылдамдыгы v , s аралыктан убакыт боюнча биринчи туундусуна барабар:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t),$$

ал эми ылдамдануу a – экинчи туунду:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

2. Жогорку тартиптеги дифференциалдар. $y = f(x)$ функциясынын дифференциалы dy xтен функция болот:

$$dy = f'(x)dx, \text{ же } dy = y'dx.$$

Анын дифференциалы $d(dy) = d^2y$ экинчи тартиптеги дифференциал деп аталат. d^2y ти эсептөөдө dy ти дифференцирлөөгө туура келет, б.а. $y'dx$. Дифференцирлөө процессинде $dx = \Delta x$ xтен көз каранды эмес, демек x боюнча дифференцирлөөдө турактуу болуп каралат. Ошентип, төмөнкүгө ээ болобуз

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y')dx = y''dxdx = y''(dx)^2.$$

$(dx)^2$ туюнтманы кыскача dx^2 деп жазуу кабыл алынган; анда

$$d^2y = y''dx^2.$$

Ушуга окшош эле $d(d^2y) = d^3y$ үчүнчү тартиптеги дифференциал деп аталат жана жалпысынан $d(d^{n-1}y) = d^ny$, n- тартиптеги дифференциал деп аталат.

n- тартиптеги дифференциал n-тартиптеги туундуну аргументтин дифференциалынын n- даражасына көбөйткөнгө барабар $(dx)^n = dx^n$:

$$d^ny = y^{(n)}dx^n. \quad (2)$$

Мисалы, $d^3y = y'''dx^3$.

436. $y = tgx$, y'' ти тапкыла.

Чыгаруу. Биринчи туундуну табабыз: $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Экинчи туунду аныктама боюнча биринчи туундунун туундусуна барабар, демек

$$y'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\frac{-2\cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

437. $y = (x+1)^{\mathbf{5}}$, y''' ти тапкыла.

Чыгаруу. Удаалаш биринчи, экинчи, үчүнчү туундуну табабыз.

$$y' = 5(x+1)^4, y'' = 20(x+1)^3, y''' = 60(x+1)^2.$$

438. $y = a^x$, n-тартиптеги туундуну тапкыла.

Чыгаруу. y', y'', y''' табабыз:

$$y' = a^x \ln a, y'' = a^x (\ln a)^2, y''' = a^x (\ln a)^3.$$

Удаалаш туундулардын түзүлүү закону аныкталды: ар бир кийинкиси мурдагысын $\ln a$ көбөйтүү менен алынат. n- тартиптеги туунду үчүн туюнтма төмөнкүдөй болот

$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

Эми a^x тен керектүү туундуну алыш үчүн мурдагы туундуларды алуунун зарылчылыгы жок, жөн эле даяр формуланы колдонсо болот. Мисалы,

$$y^{(10)} = a^x (\ln a)^{10}.$$

Эгерде $y = e^x$ болсо, анда $y^{(n)} = e^x$ болоорун байкайбыз.

439. $y = \sin x$, n-тартиптеги туундуну тапкыла.

Чыгаруу. Удаалаш $y', y'', y''', y^{(4)}$ аныктайбыз:

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{(4)} = \sin x.$$

Эми туундуларды удаалаш эсептөөнүн процессин улантуунун кереги жок экендиги түшүнүктүү: $y^{(5)}$ туунду y' ке барабар болот, $y^{(6)} = y''$ ж.б.у.с.

$\sin x$ тен кандайдыр бир тартиптги туундусун табуу үчүн , туундунун тартибин төрткө бөлүү жетиштүү, бул бөлүүдөгү калдыкты таап жана тартиби ушул калдыкка барабар болгон (эгерде калдык нөлгө барабар болсо- туунду $\sin x$ функциясынын өзүнө барабар) туундуну издейбиз. Мисалы,

$$y^{(27)} = y''' = -\cos x,\ y^{(10)} = y'' = -\sin x, y^{(16)} = y = \sin x.$$

Биз $\sin x$ тен удаалаш туундулар түзүлгөн закон ченемдүүлүк алдык. Бирок, $\sin x$ тен n-тартиптеги туундунун жалпы формуласын да берсе болот. Чындыгында,

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

…………………………………………………………..

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

440. $y = x^3 e^x$, $y^{(4)}$ тапкыла.

Чыгаруу. Ар бир көбөйтүлүүчүдөн өзүнчө удаалаш туундуларды табабыз:

$$(x^3)' = 3x^2, (x^3)'' = 6x, (x^3)''' = 6, (x^3)^{(4)} = 0;$$

$$(e^x)' = (e^x)'' = (e^x)''' = (e^x)^{(4)} = e^x.$$

(1) Лейбництин формуласын n=4 үчүн жазабыз:

$$(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}.$$

Бул формуланы $u = x^3, v = e^x$ деп берилген учур үчүн колдонобуз:

$$y^{(4)} = (x^3 e^x)^{(4)} = 4 \cdot 6e^x + 6 \cdot 6x \cdot e^x + 4 \cdot 3x^2 e^x + x^3 e^x,$$

$$y^{(4)} = (x^3 + 12x^2 + 36x + 24)e^x.$$

441. $y = \arcsin x$, y'' тапкыла.

442. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$, y'' тапкыла.

443. $y = \sqrt{x^2 + 1}$, y'' тапкыла.

444. $y = \operatorname{arctg} x$, y''' тапкыла.

445. $y = x^3 + 2x + 6$, $y^{(4)}$ тапкыла.

446. $y = x^6 + 5x^4 + 2x^3 - x^2$, $y^{(4)}$ тапкыла.

447. $y = \sqrt{x}$, $y^{(4)}$ тапкыла.

448. $y = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 1$, $y^{(5)}$ тапкыла.

449. $y = x^2 \sin 2x$, y''' тапкыла.

450. $y = x^4 \ln x$, $y^{(4)}$ тапкыла.

Көрсөтмө. 449 жана **450** чыгарууда (1) Лейбництин формуласын колдонобуз.

Берилген функциядан $y^{(n)}$ туюнтмасын тапкыла:

451. $y = \cos x$.

452. $y = \ln x$.

453. $y = x^n$.

454. $y = sin^2 x$.

455. $y = \frac{1+x}{1-x}$.

456. Чекит түз сызык боюнча кыймылдайт, мында чекиттин эсептин башталышынан аралыгы s (метр менен өлчөнөт) $s = t^3 -$

$2t^2+4t-1$ формуласы менен аныкталат, мында $t-$ убакыт (секунда менен өлчөнүүчү).
Үчүнчү секунданын аягында чекиттин кыймылынын ылдамдануусун аныктагыла.

457. m массасынын чекити O тең салмактуулук абалынын жанында $x=a\ \sin 2\pi\omega t$ закону боюнча гармоникалык термелүү жүргүзөт, мында x - O дон t моментинде чекиттин аралыгы, a жана ω – туррактуулар. Аракет кылуучу күч O дон чекиттин аралыгына пропорционалдуу экендигин көрсөткүлө.

§ 2.6. АЙКЫН ЭМЕС ЖАНА ПАРАМЕТРДИК БЕРИЛГЕН ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИРЛӨӨ

1. **Айкын эмес функциялар.** Эгерде y xтен функция болуп төмөнкүдөй катыш менен берилсе

$$F(x,y)=0, \tag{1}$$

мында $F(x,y)-x$ жана y ти кармаган туюнтма, анда y xтен айкын эмес функция деп аталат. Кээ бир учурларда (1) теңдемесин y ке салыштырмалуу чечүүгө болот жана функциянын айкын эмес ыкмасынан айкын түргө $y=f(x)$
өтүүгө мүмкүн болот, башка учурларда мындай өтүү ишке ашпайт. Мындай өтүүнүн мүмкүнчүлүгүнө карабастан функциянын айкын эмес ыкмада берилишинде y тин x боюнча туундусу төмөнкүдөй түрдө берилиши мүмкүн: 1. (1) барабардыгынын сол жагынан туунду табабыз, y ти x тан функция катары карап жана аны нөлгө барабарлайбыз.

2. Алынган теңдемени y' ке салыштырмалуу чыгарабыз; жыйынтыгында айкын эмес функциядан төмөнкүдөй түрдө туундуга ээ болобуз

$$y'=f(x,y). \tag{2}$$

Айкын эмес функциядан экинчи туундуну аныкташ үчүн (2) барабардыгын дифференцирлейбиз (кайрадан y ти x тан функция катары карап), андан кийин оң жагында y' ти (2) барабардыгынан

анын туюнтмасы менен алмаштырабыз. Ушуга окшош эле жогорку тартиптеги туундуларды аныктоодо жүргүзөбүз.

458. $x^3y^2 + 5xy + 4 = 0,\ y'$ тапкыла.

Чыгаруу. y ти x тан функция катары карап, берилген катышты дифференцирлейбиз:

$$3x^2y^2 + 2x^3yy' + 5y + 5xy' = 0.$$

Алынган теңдемени y'карата чыгарабыз:

$$y' = -\frac{3x^2y^2 + 5y}{2x^3y + 5x}.$$

459. $\operatorname{arctg} y - y + x = 0, y''$ тапкыла.

Чыгаруу. Берилген катышты дифференцирлейбиз жана андан кийин y' ти аныктайбыз:

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0, \text{ же } y' - y' - y^2y' + 1 + y^2 = 0,$$

мындан

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1. \tag{3}$$

Андан ары y'' ти табабыз:

$$y'' = -2y^{-3}y' = -\frac{2}{y^3}y'.$$

Акыркы барабардыктын оң жагындагы y' тин ордуна анын (3) барабардыгы менен аныкталган маанисин койобуз,

$$y'' = -\frac{2}{y^3}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

460. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс берилген. Эллипсте жаткан, $M(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өткөн жаныманын тендмесин тапкыла.

Чыгаруу. Эллипстин теңдемесин төмөнкүдөй түрдө жазып алабыз

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \tag{4}$$

$M(x_1, y_1)$ чекити эллипсте жатат, анда төмөнкүдөй теңдештик орун алат

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2. \tag{5}$$

(4) барабардыгынын эки жагын тең дифференцирлейбиз:

$$2a^2yy' + 2b^2x = 0;$$

y' ти аныктайбыз:

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

(x_1, y_1) чекитинде y' туундунун маанисин табабыз. Бул маани $M(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өткөн, эллипске жаныманын бурчтук коэффициенти k га барабар,

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

$M(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өткөн, жаныманын теңденмеси, төмөнкүдөй түрдө жазылат

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1),$$

же өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин

$$a^2y_1y + b^2x_1x = a^2y_1^2 + b^2x_1^2.$$

(5) теңдештигин эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

Акыркы теңдеменин эки жагын тең a^2b^2 бөлүп, акырында төмөнкүнү алабыз

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

461. $x^3y - 3x^2y^2 + 5y^3 - 3x + 4 = 0,$ y' тапкыла.

462. $x^2y + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0,$ y' тапкыла.

463. $xy^3 + 2y - 1 = 0,$ y'' тапкыла.

464. Эгерде $x^3 + 2xy - 3y^2 = 0$ болсо, (1,1) чекитинде y''тин маанисин тапкыла.

465. (1,1) чекитинде $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$ ийрисине жаныма жүргүзгүлө.

466. Гиперболада жаткан, $M(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өткөн $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболага жаныманын тендмесин тапкыла.

467. Параболада жаткан, $M(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өткөн $y^2 = 2px$ параболага жаныманын тендмесин тапкыла.

2. Параметрдик түрдө берилген функциялар.

x аргументтен y функциясы параметрдик катыштын жардамында берилсин

$$x = \alpha(t), y = \beta(t), \tag{6}$$

мында $\alpha(t)$ жана $\beta(t)$ – t дифференцирленүүчү функциялар жана $\alpha'(t) \neq 0$.

y тен x боюнча туунду (6) барабардыгын дифференцирлөө жолу менен табылат:

$$dx = \alpha'(t)dt,\ dy = \beta'(t)dt, \tag{7}$$

мындан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \varphi(t). \tag{8}$$

y тен x боюнча экинчи туундуну (8) катышын x боюнча дифференцирлеп табабыз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d[\varphi(t)]}{dx} = \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

468. $\begin{cases} x = acos^3t \\ y = asin^3t \end{cases}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ тапкыла.

Чыгаруу. Берилген барабардыктарды дифференцирлейбиз:

$$dx = -3cos^2t \sin t\, dt;\ dy = 3asin^2t \cos t\ dt,$$

мындан

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t.$$

Экинчи туундуну табабыз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d(\operatorname{tg} t)}{dx} = -\frac{d(\operatorname{tg} t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{\frac{d(\operatorname{tg} t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{3a \sin t\, cos^4t}.$$

469. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, y'' тапкыла.

Чыгаруу. Берилген барабардыктарды дифференцирлейбиз:

$$dx = \frac{dt}{t},\ dy = 2\cos 2t\, dt,$$

$$\frac{dy}{dx} = 2t\cos 2t.$$

Экинчи туундуну табабыз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(2t\cos 2t)}{dx} = \frac{d(2t\cos 2t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d(2t\cos 2t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{2\cos 2t - 4t\sin 2t}{\frac{1}{t}} = 2t(\cos 2t - 2t\sin 2t).$$

Төмөнкү мисалдарда $\frac{dy}{dx}$ ти тапкыла:

470. $x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

471. $x = \frac{1}{t+1}, \quad y = \frac{t}{t+1}$.

472. $x = \sqrt{t}, \quad y = \sqrt[3]{t}$.

Төмөнкү мисалдарда $\frac{d^2y}{dt^2}$ ти тапкыла:

473. $x = e^t, y = \arcsin t$.

474. $x = a(\sin t - t\cos t), y = a(\cos t + t\sin t)$.

475. $x = e^t\cos t, y = e^t\sin t$.

476. Жаныманын теңдемесин жана циклоидке нормалды тапкыла:

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t = \frac{\pi}{3}$ чекитинде.

477. $x = t^2 + 1, y = 2t^3 - t^2$ сызыктарында жаныма $y = 2x$ түз сызыгына параллель болгон, M чекитин тапкыла.

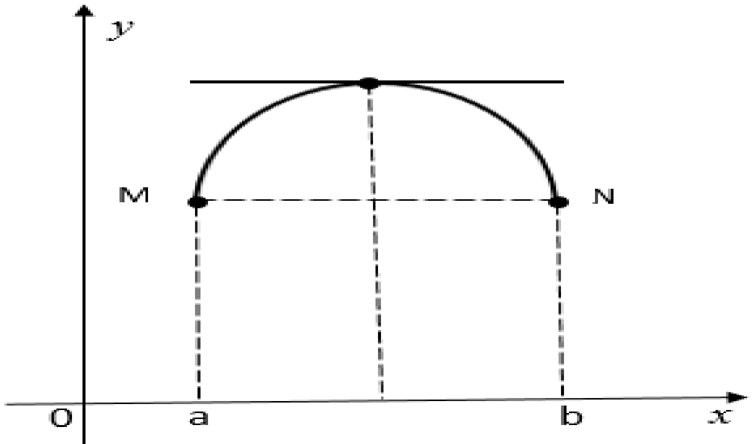
БАП 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨРДҮН ТИРКЕМЕЛЕРИ

§ 3.1. ОРТО МААНИ ЖӨНҮНДӨ ТЕОРЕМА. ТЕЙЛОРДУН ФОРМУЛАСЫ

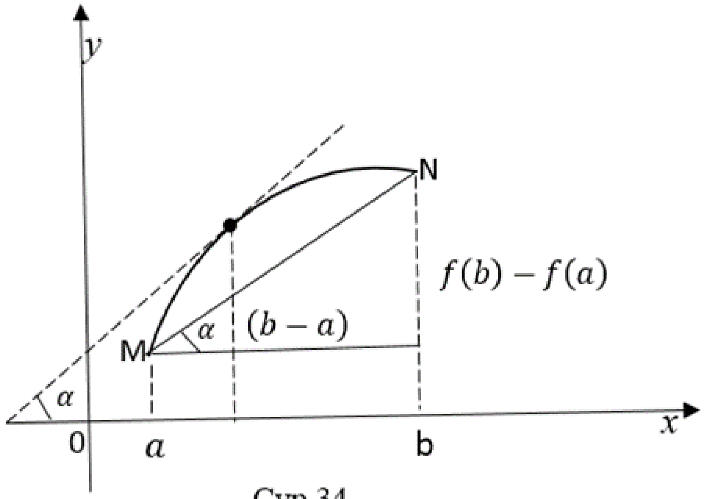
1. Орто маани жөнүндө теорема. Бул теоремалар кесиндинин учтарындагы функциянын маанисин бул кесиндинин кээ бир ички “орто” чекитинде анын туундусунун мааниси менен байланыштырат.

*Роллдун теоремасы.*Эгерде $y = f(x)$ функциясы : 1. $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз, 2. (a, b) интервалында дифференцирленүүчү, 3. $f(a) = f(b)$ болсо, анда (a, b) интервалында жок дегенде бир ξ чекити табылып жана $f'(\xi) = 0$ болот.

Геометриялык терминдерде бул теорема төмөнкүдөй түрдө берилет: эгерде функциянын графиги үзгүлтүксүз ийри болсо, жаныма (графиги жылма ийри болот) жүргүзүүгө мүмкүн болгон ар бир ички чекитте жаанын учтарын бекемдеген хордасы Ox огуна параллель (сүр.33), анда жаныма Ox огуна параллель болгон ийриден жок дегенде бир чекит табылат.



Сүр.33



Сүр.34

Лаграждын теоремасы. Эгерде $y = f(x)$ функциясы : 1. $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз, 2. (a, b) интервалында дифференцирленүүчү, 3. $f(a) = f(b)$ болсо, анда (a, b) интервалында жок дегенде бир ξ чекити табылат жана

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi),\ a < (\xi) < b. \qquad (1)$$

Лагранждын теоремасынын геометриялык маанисин карайбыз. Демек, (1) формуласынын сол жагында Ox огуна MN жантайган хорданын бурчунун тангенси $tg\,\alpha$ турат, оң жагында – бурчтун тангенсинин кээ бир ξ чекитинде мааниси графикке жаныма жантайган. Жаанын учтарын бириктирген, жанымасы хордага параллель болгон ийринин жылма жаасында чекит дайыма табыларын теорема бекемдейт.

Роллдун теоремасы Лагранждын теоремасынын жеке учуру болот.Роллдун теоремасында MN хордасы Ox огуна параллель.

Кээде (1) формуласын башка түрдө жазышат, $b = x$ белгилеп жана бөлүмүнө көбөйтүп:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) \qquad (2)$$

$$(a < (\xi) < x).$$

Кошинин теоремасы. Эгерде $\varphi(x)$ жана $\psi(x)$: 1) $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз,

2. (a, b) интервалында дифференцирленүүчү,

3. (a, b) интервалында $\psi'(x) \neq 0$,

анда (a,b) интервалында жок дегенде бир ξ чекити табылып, төмөнкү барабардык аткарылат

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}. \qquad (3)$$

478. Роллдун теоремасын колдонуп $(-3,1)$ интервалында $P(x)=(x+3)(x+2)(x-1)$ көп мүчөсү үчүн $P''(x)=0$ теңдемесинин тамыры табыла тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. $P(x)$ көп мүчөсү $x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_3=1$ чекиттеринде нөлгө айланат. $(-3,-2)$ жана $(-2,1)$ интервалдарынын ар биринде $P(x)$ функциясына Роллдун теоремасы колдонулат, анткени $P(x)$ бардык жерде дифференцирленүүчү жана

$$P(-3)=P(-2)=0,\ \ P(-2)=P(1)=0;$$

ошондуктан $\xi_1,\ -3<\xi_1<-2$, жана $\xi_2,\ -2<\xi_2<1$ чекиттери табылат жана

$$P'(\xi_1)=P'(\xi_2)=0.$$

$P'(\xi_1)$ функциясына $[\xi_1,\xi_2]$ кесиндисинде Роллдун теоремасы дагы колдонулат, ошондуктан ξ чекити табылып, $P''(\xi)=0$ болгондо, $\xi_1<\xi<\xi_2$.

479. $[-1,1]$ кесиндисинде $f(x)=\arcsin x$ функциясы үчүн Лагранждын теоремасынын айкындуулугун текшергиле. (1) шарты аткарылган, ξ нин маанисин тапкыла.

Чыгаруу. Функция $-1\le x\le 1$ болгондо аныкталган жана үзгүлтүксүз. $f'(x)$ ти табабыз:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$(-1,1)$ интервалынын ичинин бардык жеринде туунду чектүү; $x=\pm1$ болгондо жашабайт, бирок бул Лагранждын теоремасынын колдонуу шартын бузбайт. (1) шартын канаattандырган ξ чекити жашаш керек. (1) шартын жазып, бул чекитти табабыз:

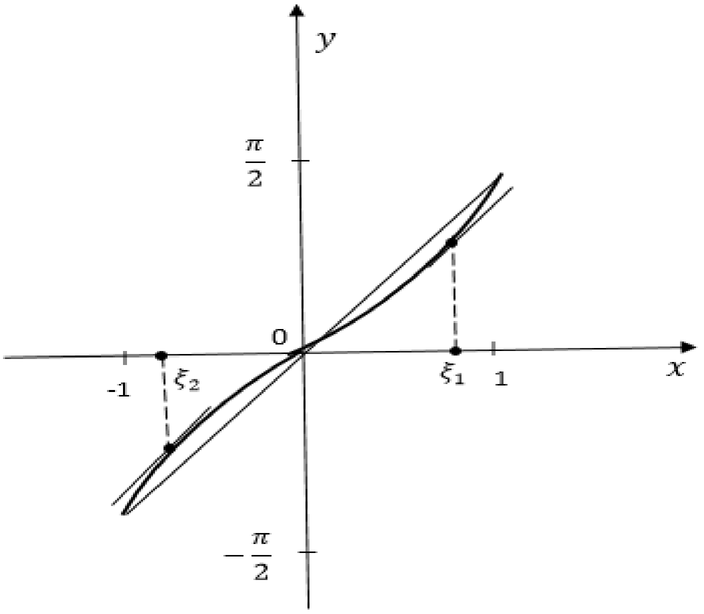
$$\frac{\arcsin 1-\arcsin(-1)}{1-(-1)}=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}};$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

мындан

$$\sqrt{1-\xi^2} = \frac{2}{\pi}, \text{ же } \xi_{1,2} = \pm\sqrt{1-4/\pi^2}.$$

Ошентип, берилген учурда (1) шарты эки чекит үчүн аткарылат (Сүр. 35).



Сүр. 35

480. (2) формуласын пайдаланып, $\ln(1+e)$ маанисин баалоо.

Чыгаруу. $f(x) = \ln x$ функциясын карайбыз. Бул функция $x > 0$ болгондо бардык жерде дифференцирленүүчү жана $f'(x) = \frac{1}{x}$. $[e, e+1]$ кесиндиси үчүн (2) формуласын жазабыз:

$$\ln(1+e) = \ln e + [(e+1) - e] \cdot \frac{1}{\xi} = 1 + \frac{1}{\xi},$$

мында $e < \xi < 1 + e$.

$1 + \frac{1}{\xi}$ туюнтманы $e < \xi < 1 + e$ болгондо баалайбыз:

$1 + \frac{1}{\xi} < 1 + \frac{1}{e}$, $\xi > e$ болгондуктан жана

$1 + \frac{1}{\xi} > 1 + \frac{1}{1+e}$, анткени $\xi < 1 + e$

Ошентип,

$$1 + \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}.$$

Бул баалоого $e \approx 2{,}7$ коюп, жыйынтыгында төмөнкүнү алабыз

$$1{,}27 < \ln(1+e) < 1{,}37.$$

481. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде $f(x) = \cos x$ жана $\varphi(x) = x^3$ функцияларына Кошинин теоремасы колдонулабы?

482. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ кесиндисинде $f(x) = x + \frac{1}{x}$ функциясы үчүн Лагранждын теоремасынын шартынын аткарылышын текшергиле. Ортонку маани ξ ни тапкыла.

483. (2) формуласын пайдаланып, $arctg\,1{,}5$ маанисин баалоо.

Көрсөтмө. (2) формуласын $[1; 1{,}5]$ кесиндисинде колдонгула.

484. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде $f(x) = \cos x$ жана $\varphi(x) = \sin x$ функциялары үчүн Кошинин теоремасынын шартынын аткарылышын текшергиле. ξ ортонку маанини тапкыла.

2. Тейлордун формуласы. $x = a$ чекитинин кээ бир аймагында (бул чекиттин өзү да кирет) n туундуга ээ болуучу функциялар үчүн (2) формуласынын жалпыланышы Тейлордун формуласы болот:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n(x), \qquad (4)$$

мында $R_n(x) -$ Тейлордун формуласынын калдык мүчөсү – $x \to a$ умтулганда $x - a$ айырмасы менен салыштырууда жок дегенде n – тартиптеги чексиз кичине болот. Лагранждын формуласында калдык мүчө төмөнкүдөй түргө ээ

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \qquad (5)$$

мында $\xi -$ a жана x чекиттеринин арасындагы кээ бир ортонку чекит.

$n = 1$ болгондо Тейлордун формуласы (2) формуласы менен дал келет, ал эми $n = 2$ болгондо төмөнкүдөй жазылат:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_2(x),\ R_2(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\xi).$$

485. $a = 0$ чекитинин аймагында $y = \sin x$ функциясын Тейлордун формуласы боюнча көрсөткүлө.

Чыгаруу. $\sin x$ функциясы бардык жерде каалагандай тартиптеги туундуга ээ, Тейлордун формуласы каалагандай a чекитинде эркин n тартиптеги функция үчүн колдонулат. $a = 0$ болгондо Тейлордун формуласын жазыш үчүн , $f^{(n)}(0)$ маанисин эсептөө керек. **385**тин чыгарылышына ылайык $f(x) = \sin x$ үчүн

$$f^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \text{б.а } f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}.$$

Эгерде $n = 2k \ \ (k = 0,1,2,\dots)$, анда

$$f^{(2k)}(0) = \sin k\pi = 0,$$

Ошондуктан $\sin x$ ти Тейлордун формуласы боюнча ажыратууда жуп номердеги мүчөлөр жок. n так үчүн $n = 2k - 1 \ \ k \ (k = 1,2,3,\dots)$

$$f^{(2k-1)}(0) = \sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k-1},$$

демек так мүчөлөрдүн белгилери кезектешет.

Ошентип, $n = 2k + 1$ болгондо $y = \sin x$ функциясынын төмөнкүдөй Тейлордун катарына ажыроосун алабыз:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{2k-1} + R_{2k+1}(x), \tag{6}$$

мында

$$R_{2k+1}(x) = \frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{\sin\left(\xi + \frac{2k+1}{2}\pi\right)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$
$$= (-1)^k\frac{\cos\xi\, x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

486. $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ көп мүчөсүн $(x - 2)$ даражасы боюнча ажыраткыла.

Чыгаруу. Көп мүчө бардык жерде каалагандай тартиптеги туундуга ээ болот. (4) формуласына $a = 2$ койобуз. $b_n = \frac{P^{(n)}(2)}{n!}$ коэффициентин эсептейбиз:

Таблица 3

n	$P^{(n)}(x)$	$P^{(n)}(2)$	b_n
0	$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$	0	0
1	$P'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8$	0	0
2	$P''(x) = 24x^2 - 30x - 6$	30	15
3	$P'''(x) = 48x - 30$	66	11
4	$P^{(4)}(x) = 48$	48	2
5	$P^{(5)}(x) = 0$	0	0

(4) формуласын колдонобуз:

$$P(x) = 15(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + 2(x-2)^4, P^{(5)}(x) \equiv 0$$

болгондуктан $R_5(x) = 0$.

487. $a = 0$ чекитинин аймагында негизги элементардык функциялардын төмөнкүдөй ажыроолорун алгыла:

а) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),\ R_n = \frac{e^{x_0} \cdot x^n}{n!}$ (7)

б) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x)$

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+\xi_0} \right)^n. \quad (8)$$

в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2(k-1)}}{[2(k-1)]!} + R_{2k}(x),$ (9)

$$R_{2k}(x) = (-1)^k \frac{\cos \xi}{(2k)!} x^{2k}.$$

488. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 4$ көп мүчөсүн $(x-1)$ даражасы боюнча ажыраткыла.

489. $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^3$ көп мүчөсүн x даражасы боюнча ажыраткыла.

490. $f(x) = \sqrt{1+x}$ функциясын x даражасы боюнча x^4 тү кармаган мүчөгө чейин ажыраткыла.

491. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясын $(x-2)$ даражасы боюнча $(x-2)^4$ тү кармаган мүчөгө чейин ажыраткыла.

3. Тейлордун формуласынын колдонулушу. Тейлордун формуласы жакындаштырылган формулалардын булагы болот. Анын негизинде элементардык функциялардын катарынын маанилеринин таблицалары түзүлгөн. Буга байланыштуу кээ бир маселелерди карайбыз.

492. (6) ажыроосун колдонуп (**431** кара), $y = \sin x$ функциясынан Тейлордун алгачкы үч көп мүчөсүн жазгыла жана $0 \leq x \leq 1$ кесиндисинде көп мүчө менен функциянын жакындаштырылган ордуна коюусуунун каталыгын аныктагыла.

Чыгаруу. (6) формуласында $k = 1$ деп алып, төмөнкүгө ээ болобуз

$$\sin x = x + R_3(x), R_3(x) = -\tfrac{1}{6}\cos\xi \cdot x^3 \qquad (0 < \xi < x).$$

Мындан биринчи жакындаштырылган формуланы чыгарабыз:

$$\sin x \approx x.$$

Берилген кесиндиде $R_3(x)$ калдык мүчөнүн чоңдугун баалап, кесиндиде биринчи жакындаштырылган формуланын катасынын баалоосун алабыз:

$$|R_3(x)| = \frac{1}{6}|\cos\xi||x|^3 < \frac{1}{6}(0{,}1)^3 < 0{,}001,$$

анткени $[0; 0{,}1]$ кесиндисинде $|\cos\xi| < 1$, ал эми $|x| \leq 0{,}1$.

Андан ары (6) га $k = 2$ жана $k = 3$ коюп, көрсөтүлгөн каталардын баалары менен экинчи жана үчүнчү жакындаштырылган формуланы алабыз:

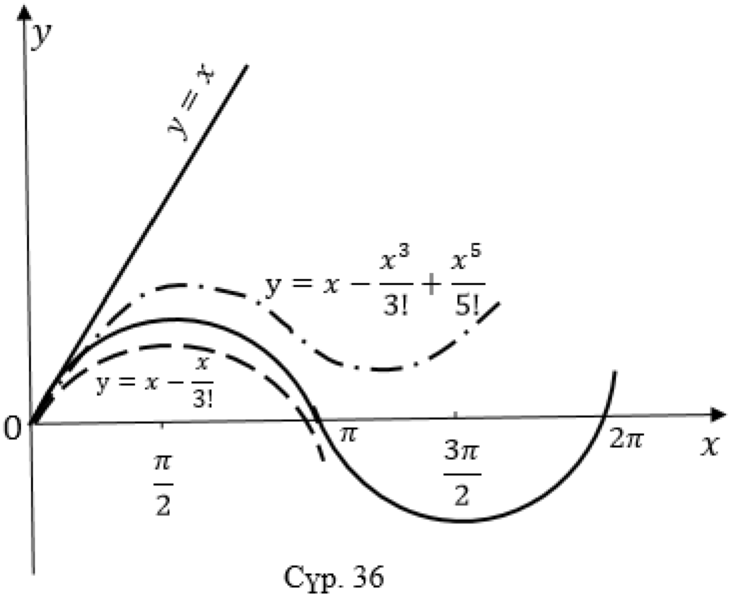
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!},$$

$$|R_5(x)| < \frac{(0{,}1)^5}{5!} < (0{,}1)^7;$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$|R_7(x)| < \frac{(0{,}1)^7}{7!} < (0{,}1)^{10}.$$

36 - сүрөттө $y = \sin x$ функциясынын графиги жана Тейлордун көп мүчөсүнүн алгачкы үч мүчөсү көрсөтүлгөн.



Сүр. 36

Бул мисал Тейлордун көп мүчөсү функцияны жакындаштырууда кээ бир жалпы закон ченемдүүлүктөр жөнүндө көрсөтмөнү аткарууну берет. Биринчиден, көп мүчөнүн функциядан четтөөсү канчалык кичине болсо, x канчалык a га жакын болсо жана $x \to a$ умтулганда, ал нөлгө умтулат (берилген мисалда $x \to 0$ умтулганда); экинчиден, фиксирленген x те көп мүчөнүн функциядан четтөөсү канчалык кичине болуп, көп мүчөнүн тартиби канчалык чоң болсо жана $n \to \infty$ умтулганда, ал нөлгө умтулат.

493. (7) ажыроосун колдонуп (**487** кара), жакындаштырылган формуланын абсолюттук катасын $[-0{,}1; 0{,}1]$ кесиндисинде баалоо

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}.$$

Чыгаруу. (7) формуласы $n = 3$ үчүн төмөнкүдөй түргө ээ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}x^3 e^{\xi},$$

мында $\xi - (-0{,}1; 0{,}1)$ интервалындагы ички чекит.

438 мисалдай эле, так формула калдык мүчөнүн жакындаштырылган чоңдугунан айырмаланат

$$|R_4(x)| = \frac{1}{3!}x^3 e^{\xi},$$

$[0; 0{,}1]$ жана $[-0{,}1; 0]$ кесиндилеринде $|R_4(x)|$ баалоо керек. Биринчи учурда

$$|R_4(x)| = \frac{1}{3!}\left|x^3 e^{\xi}\right| < \frac{(0{,}1)^3 e^{0{,}1}}{6} < 0{,}004,$$

анткени берилген учурда $0 < \xi < x \leq 0{,}1$; экинчи кесинди үчүн

$$|R_4(x)| = \frac{1}{3!}\left|x^3 e^{\xi}\right| < \frac{1}{6}(0{,}1)^3 e^0 < 0{,}002,$$

анткени $-0{,}1 < \xi < x \leq 0$.

Алынган бааларды салыштырып, $[-0{,}1; 0{,}1]$ кесиндисинде берилген формуланын абсолюттук катасы 0,004 төн ашып кетпеген жыйынтыкка келебиз.

494. Жакындаштырылган формула боюнча $\ln 1{,}5$ маанисин эсептеп, биз кетирген катаны баалайбыз

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

б.а. (8) ажыроосунун алгачкы төрт мүчөсүн колдонуп.

Чыгаруу. (8) формуласын $n = 5$ үчүн жазабыз:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^5 \quad (0 < \xi < x).$$

Бул так барабардык жакындаштырылган формуладан калдык мүчөнүн чоңдугунан айырмаланат

$$R_5 = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^5, \text{ мында } (0 < \xi < x).$$

Мындан катанын чоңдугу калдык мүчөнүн маанисине барабар экендиги келип чыгат. Калдык мүчө төмөндөгүдөй бааланышы мүмкүн:

$$0 < R_5 \leq \max_{0 \leq \xi \leq 0{,}5} \frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^5 < 0{,}007.$$

Демек, 0,007 катадан көп эмес

$$\ln(1+0{,}5) \approx 0{,}5 - \frac{1}{2}(0{,}5)^2 + \frac{1}{3}(0{,}5)^3 - \frac{1}{4}(0{,}5)^4 \approx 0{,}401.$$

Ошентип, $\ln(1+0{,}5)$ тин чыныгы мааниси $0{,}401 < \ln 1{,}5 < 0{,}408$ пределдеринде камалган.

495. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ жакындаштырылган формуланын катасын $\left[-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right]$ кесиндисинде баалоо.

496. $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ жакындаштырылган формуланын катасын $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ кесиндисинде баалоо.

497. 490 дагы ажыроону колдонуп, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ маанисин 0,01 тактыкка чейин менен эсептегиле. Кайсы жакындаштырылган формуланы пайдалануу керек?

§ 3.2. ЛОПИТАЛДЫН ЭРЕЖЕСИ

1. $\frac{0}{0}$ жана $\frac{\infty}{\infty}$ түрдөгү аныксыздыктар. Функциянын пределин издөөдө көбүнчө аргументтин пределдик маанисин алмаштырууда $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$,
$\infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ түрдөгү аныкталбаган туюнтмаларга алып келет. Мындай учурлардагы функциянын пределин табуу аныксыздыкты ачуу деп аталат. Төмөндө келтирилген теорема, Лопиталдын эрежеси деген аталыш менен белгилүү, аныксыздыктарды ачуу үчүн негизги аппарат болот.

Теорема. Эгерде $\varphi(x)$ жана $\psi(x)$ эки функциялары: 1. $x \to a$ умтулганда чексиз кичине же чексиз чоң,

2)$x = a$ чекитинин аймагында дифференцирленүүчү (кээ бир интервалда $(a-\delta,\ a+\delta), \delta > 0$),

3)$x = a$ чекитинин аймагында $\psi'(x) \neq 0$, мүмкүн $x = a$ чекитинин өзүн кошпогондо, жана

4) чектүү жана чексиз предел жашайт

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k,$$

анда бул функциялардын катышынын предели алардын туундуларынын катышынын пределине барабар б.а.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi\prime(x)^*}{\psi\prime(x)}. \qquad (1)$$

Бул теорема бир жактуу пределдерде жана $x \to \infty$ болгон учурда орун алат.

Келтирилген теорема функциянын өзүнүн катышынын пределинин алардын туундуларынын катышынын пределине эсептөөнү жөнөкөйлөтөт, көпчүлүк учурларда жөнөкөй мисалды берет.

(* $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ предели жашабайт дегенден, берилген предел жашабайт деген жыйынтык чыгарууга болбойт (кара **472,473**)).

Төмөнкү мисалдарда Лопиталдын эрежеси боюнча берилген пределдерди эсептегиле.

498. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}$.

Чыгаруу. $x=1$ пределдик маанини ордуна койгондо $\frac{0}{0}$ аныксыздык түрүнө алып келет, анткени $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)=0$ жана $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$. Туундулардын катышынын предели жашайт:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=3,$$

ошондуктан

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)'}{(\ln x)'}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=3.$$

499. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}$.

Чыгаруу. Мында да $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздык. Аны ачуу үчүн Лопиталдын эрежесин колдонобуз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{5\pi\cos 5\pi x}{2\pi\cos 2\pi x}=\frac{5}{2}\frac{\cos 5\pi}{\cos 2\pi}=-\frac{5}{2}.$$

500. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$.

Чыгаруу. $x\to +\infty$ умтулганда алымы жана бөлүмү чексиз кичине, анда Лопиталдын эрежеси боюнча

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)'}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty.$$

Туундулардын катышынын предели $+\infty$ ($4k=+\infty$ шартында), демек берилген предел $+\infty$ барабар.

501. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}$ $, a>0.$

Чыгаруу. Бул аныксыздыктын түрү $\frac{\infty}{\infty}$, Лопиталдын эрежесин колдонсо болот. Туундулардын катышына өтүп, төмөнкүнү алабыз

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0.$$

502. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}.$

Чыгаруу. Бул жерде жыйынтык алуу үчүн Лопиталдын эрежесин эки жолу колдлонууга туура келет, анткени берилген катыш жана туундулардын катышы $\frac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздыкка келет. Лопиталдын эрежесин кайталап колдонуу көпчүлүк учурда барабардыктын бир катарына эле жазылат:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

503. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}.$

504. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin 3\pi x}{\sin 2\pi x}.$

505. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x^2}.$

506. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+x-1}.$

507. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x^2}.$

508. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x}.$

509. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}.$

2. $0\cdot\infty$ **жана** $\infty-\infty$ **түрдөгү аныксыздыктар.** Эгерде $x\to a$ умтулганда $\psi(x)\to 0$ жана $\varphi(x)\to\infty$, анда $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\cdot\varphi(x)$

($0\cdot\infty$ түрдөгү аныксыздык) пределин издөөдө теңдеш өзгөртүүлөрдүн жардамы менен буга чейинки каралган $\frac{0}{0}$ жана $\frac{\infty}{\infty}$ учурлардын бирөөнө келтирилиши мүмкүн:

$$\psi(x)\cdot\varphi(x)=\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \text{ же } \psi(x)\cdot\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}.$$

Эгерде $x\to a$ умтулганда $\psi(x)\to\infty$ жана $\varphi(x)\to\infty$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a}[\psi(x)-\varphi(x)]$ (аныксыздык түрү $\infty-\infty$) пределин табууда көбөйтүүдөгү функциялардын айырмасына теңдеш өзгөртүүлөрдүн жолу менен “$0\cdot\infty$ **түрдөгү** аныксыздык” ачууга алынып келинет

$$\psi(x)-\varphi(x)=\psi(x)\cdot\varphi(x)\left[\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{\psi(x)}\right].$$

Кедээ башка өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу ыңгайлуу:

$$\psi(x)-\varphi(x)=\psi(x)\left[1-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right] \text{ же } \psi(x)-\varphi(x)=$$
$$\varphi(x)\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}-1\right].$$

Төмөнкү мисалдарда функциялардын пределдерин эсептегиле:

510. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x.$

Чыгаруу. а) Функцияны өзгөртүп түзөбүз $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x=\frac{x-\pi/2}{\operatorname{ctg}x}$ ($x\to\pi/2$ умтулганда, аныксыздык түрү $\frac{0}{0}$). Лопиталдын эрежеси өзгөртүп түзүлгөн функцияларга колдоноруу айкын:

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{(\operatorname{ctg}x)'}$$
$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\left(-\frac{1}{sin^2x}\right)}=-1.$$

б) Функцияны төмөнкүдөй түрдө да өзгөртүп түзсө болот: $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$ ($x\to\frac{\pi}{2}$ умтулганда аныксыздык түрү $\frac{\infty}{\infty}$).

Өзгөртүп түзүлгөн функцияга кайра эле Лопиталдын эрежеси колдонулат:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)}{\left(\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\left(\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)'} - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{cos^2 x}}{-\dfrac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]'}{(cos^2 x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2\cos x(-\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2}{2\cos 2x} = -1.$$

а жана б чыгарылыштарын салыштырып, а чыгарылышы тезиреек максатка жетерин көрүүгө болот.

511. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

Чыгаруу. $\infty - \infty$ түрдөгү аныксыздыкка ээ болобуз. Функцияны өзгөртүп түзөбүз:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)\ln x}(x-1-\ln x) = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{[(x-1)\ln x]'} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}}.$$

Бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн x ке көбөйтүү ыңгайлуу, аны менен бөлчөктү дифференцирлөөдөн кутулабыз, ал эми көбөйтүүнү дифференцирлөө женил болот. Өзгөртүп түзүүнү улантып, төмөнкүнү алабыз

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x + x - 1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + x - 1} = \frac{1}{2}.$$

Бул мисалда **510** догудай болуп, чыгарылыштын татаалдыгы маанилүү деңгээлде функцияны өзгөртүп түзүү ыкмасынан көз каранды.

512. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^2)$.

Чыгаруу. $e^x - x^2 = e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$

(**502**ни кара), ошондуктан

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right) = 1$ жана $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$.

513. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-2x}$.

514. $\lim\limits_{x\to1+}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

515. $\lim\limits_{x\to0+}x^{\varepsilon}\ln x,\ \varepsilon > 0$.

516. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

517. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - \sqrt{x}\right)$.

3. $0^0, \infty^0, 1^\infty$ **түрдөгү аныксыздыктар.** $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$ түрдөгү функциянын пределин табууда , функцияга x пределдик маанисин коюууга мүмкүн болболгон учурлар кездешиши мүмкүн:

1) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 0$ (0^0);

2) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 0$ (∞^0);

3) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$ (1^∞).

Функциянын пределин бул учурлардын каалаган учурларда эсептөөгө мүмкүн болоорун$[\varphi(x) > 0]$, бирок $0\cdot\infty$ аныксыздыгын төмөнкү функцияны өзгөртүп түзүүнүн жардамында ачууга алып келет:

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\ln\varphi(x)^{\psi(x)}} = e^{\psi(x)\ln\varphi(x)},$$

жана ошондо, көрсөткүчтүү функциянын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде, төмөнкүгө ээ болобуз

$$f(a) = \lim_{x\to a}\varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\ln\varphi(x)} \qquad (2)$$

(2) формуласын дайыма колдонобуз.

Төмөнкү мисалдарда функциянын пределдерин тапкыла.

518. $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^x$.

Чыгаруу. 0^0 түрдөгү аныкталбаган туюнтмага ээ болоорубуз айкын. (2) формуласын колдонобуз:

$$\lim_{x\to a}(1-\cos x)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1-\cos x)}.$$

Көрсөткүчтө турган пределди өзүнчө эсептейбиз. Көбөйтүүдөн бөлүүгө өтүп, андан кийин Лопиталдын эрежесин колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$\lim_{x\to 0} x\cdot ln(1-\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1-\cos x)]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\cos x}\cdot\sin x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{2sin^2\frac{x}{2}}.$$

Белгилүү болгон чексиз кичине функцияларды эквивалентине алмаштыруу ыкмасын (x → 0 → умтулганда $\sin\alpha x\sim\alpha x$) колдонобуз:

$$-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{2sin^2\frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2 x}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 0.$$

Албетте, акыркы пределди Лопиталдын эрежеси менен эсептөөгө мүмкүн эле, бирок бул учурда рационалдуу эмес. Ошентип,

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^x = e^0 = 1.$$

519. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to 0+}\ln\frac{1}{x} = +\infty$ экендигине ээ болобуз; мында предел оң жагынан каралат, анткени $\ln\frac{1}{x}$, $x\le 0$ үчүн аныкталган эмес. ∞^0 аныксыздыгына ээ болобуз. (2) формуласы боюнча функцияны өзгөртүп түзөбүз:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}.$$

$t=\frac{1}{x}$ деп өзгөрмөнү алмаштырабыз. $x\to 0+, t\to +\infty$ болгондо жана

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\ln t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln\ln t)'}{t'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t}=0;$$

жыйынтыгында,

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{0}=1.$$

520. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

Чыгаруу. (1^{∞}) аныксыздыгына ээ болобуз. (2) формуласы боюнча өзгөртүп түзөбүз:

$$\lim_{x\to 0}\cos x^{\mathrm{ctg}^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ctg}^2 x\ln\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{sin^2 x}}=$$

$$=e^{1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(sin^2 x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(\sin x)}{2\sin x\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

521. $\lim\limits_{x\to 0+}x^{x}$.

522. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

523. $\lim\limits_{x\to 0}(1+sin^2 x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}}$.

524. $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{\ln x}$.

525. $\lim\limits_{x\to 0+}[\ln(x+e)]^{\frac{1}{x}}$.

4. Пределдерди эсептөөнүн башка ыкмалары. Лопиталдын эрежеси пределдерди эсептөөдө күчтүү каражат болгондугуна карабастан, 1-бапта каралган пределдерди эсептөөнүн ыкмаларын толугу менен алмаштыра албай тургандыгын белгилей кетүү керек.

526. Функциянын пределин тапкыла $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$.

Чыгаруу. Бул учурда Лопиталдын эрежеси колдонулбайт, анткени туундулардын катышы $\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$, $x\to\infty$ умтулганда пределге ээ эмес б.а. 4-теореманын шарты бузулган.

Ошентсе да берилген функциянын пределин эсептөөгө мүмкүн болот.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=1,$$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0 \text{ жана } \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\right).$$

527. Функциянын пределин тапкыла $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\ \sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

Ошентип, предел жашайт, бирок ал Лопиталдын эрежеси менен эсептелбейт, анткени туундулардын катышы $\frac{2x\sin\frac{1}{x}-x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}}{\cos x}$ $x\to 0$ умтулганда пределге ээ эмес.

§ 3.3. ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨГӨ ЖАНА ГРАФИКТЕРДИ ТҮЗҮҮГӨ ТУУНДУЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

1. Асимптоталар. Графиктерди түзүүдө ийрилердин асимптоталары чоң ролду ойнойт. Эгерде $x\to a$ (оңдон же солдон) умтулганда функциянын мааниси чексизге умтулса, $x=a$ түз сызыгы ийринин вертикалдуу асимптотасы деп аталат, б.а. төмөнкү шарттардын бирөөсү аткарылганда:

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to a-}f(x)=\pm\infty.$$

Эгерде $x\to+\infty\,(x\to-\infty)$ умтулганда, төмөнкү шарттар аткарылса

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b; \tag{2}$$

$y=kx+b$ түз сызыгы $y=f(x)$ ийрисинин жантайган асимптотасы болот, тиешелүү түрдө

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b.$$

Жантайган асимптотанын $k=0$ жана $b\neq\infty$ жеке учурунда горизонталдык асимптота болот. Горизонталдык асимптотанын жашашы эркин жантайган асимптотанын жашашына караганда

жөнөкөй. Бул учурда асимптотаны табуунун атайын эрежесин беребиз.

$y = b$ түз сызыгы $y = f(x)$ ийрисинин $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) умтулганда горизонталдык асимптотасы болот, эгерде төмөнкү шарт аткарылса:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \qquad (3)$$

[тиешелүү түрдө $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$]. Эки аныктама эквиваленттүү, ал (3) шартынан келип чыгат, $k = 0$

$$\left(k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = b \cdot 0 = 0\right)$$

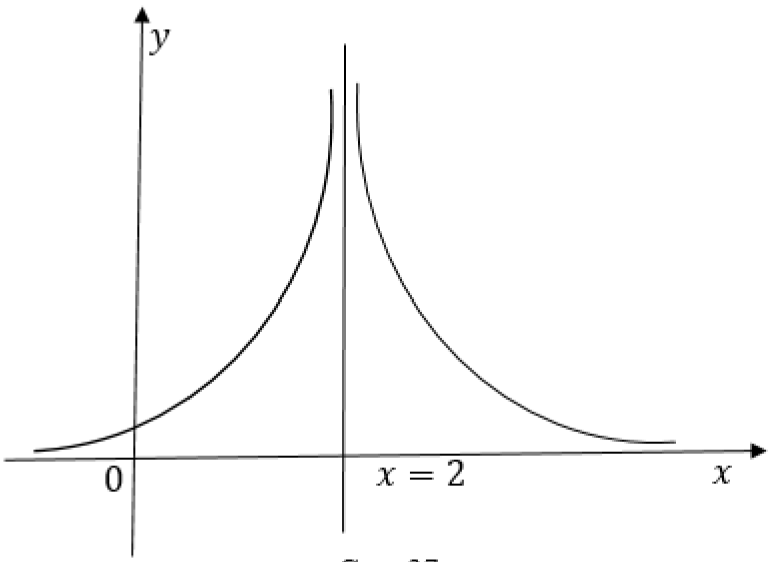
жана тескерисинче, $k = 0$ жана $b \neq \infty$ болгондо (2) шартынан (3) келип чыгат. Эгерде $k \neq 0$ болсо, мындан ары асимптотаны жантайган деп атаганга өтөбүз.

Төмөнкү мисалдарда ийрилердин асимптоталарынын теңдемесин тапкыла.

528. $y = \frac{1}{(x-2)^2}$.

Чыгаруу. Ийри $x = 2$ вертикалдык асимптотага ээ (сүр. 37), анткени

$$\lim_{x\to 2\pm} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty.$$



Сүр. 37

Бул ийри $x \to +\infty$ жана $x \to -\infty$ умтулганда $y = 0$ горизонталдык асимптотикага ээ болот, анткени

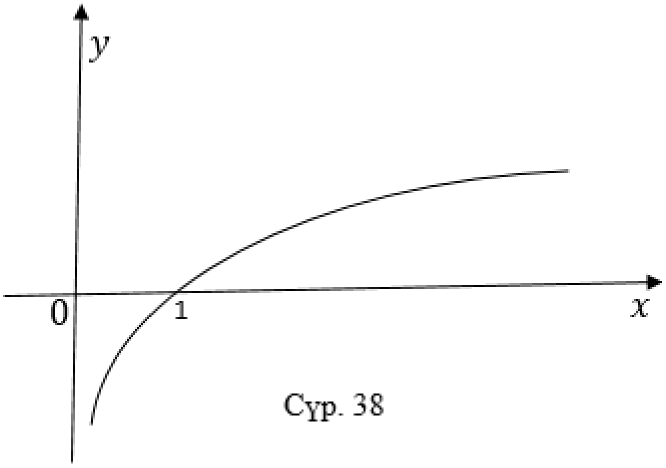
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0.$$

529. $y = \ln x$.

Чыгаруу. $y = \ln x$ функциясы жашайт жана $(0, \infty)$ интервалында үзгүлтүксүз. Чектик чекит $x = 0$ келгенде функция чектелбестен кемийт:

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

Демек, $x = 0$ түз сызыгы вертикалдык асимптотика болот (сүр. 38).



Сүр. 38

Эми $x \to +\infty$ умтулганда (1) жана (2) шарттарынын аткарылышын текшеребиз:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(2) ге $k = 0$ коюп, b ны аныктайбыз:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [\ln x - 0 \cdot x] = +\infty.$$

$x \to +\infty$ умтулганда (2) түрүндөгү предел жашабайт, ошондуктан $y = \ln x$ ийриси жантайган да, горизонталдык да асимптотикага ээ болбойт.

530. $y = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$.

Чыгаруу. Функция $x = -1$ чекитинен башка бардык жерде жашайт, б.а.

$(-\infty, -1)$ жана $(-1, \infty)$ интервалында. $x \to -1+$ умтулганда пределди эсептейбиз:

$$\lim_{x\to -1+}\frac{x^2+3x+1}{x+1}=[(-1)^2+3(-1)+1]\cdot\lim_{x\to -1+}\frac{1}{x+1}$$
$$=-1\cdot(+\infty)=-\infty.$$

Демек, $x=-1$ түз сызыгы вертикалдык асимптота болот. $x\to\pm\infty$ умтулганда (1) жана (2) шарттарынын аткарылышын текшеребиз:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1}{x(x+1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1}{x+1}-x=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=2.$$

$x\to+\infty$ жана $x\to-\infty$ умтулганда $y=x+2$ түз сызыгы жантайган асимптота болот.

531. $y=\frac{x^3+1}{x^2-4}$.

532. $y=x\,arc\text{tg}\,x$.

533. $y=\frac{x^2}{(x+3)^2}$.

534. $y=2x+\frac{2}{x-1}$.

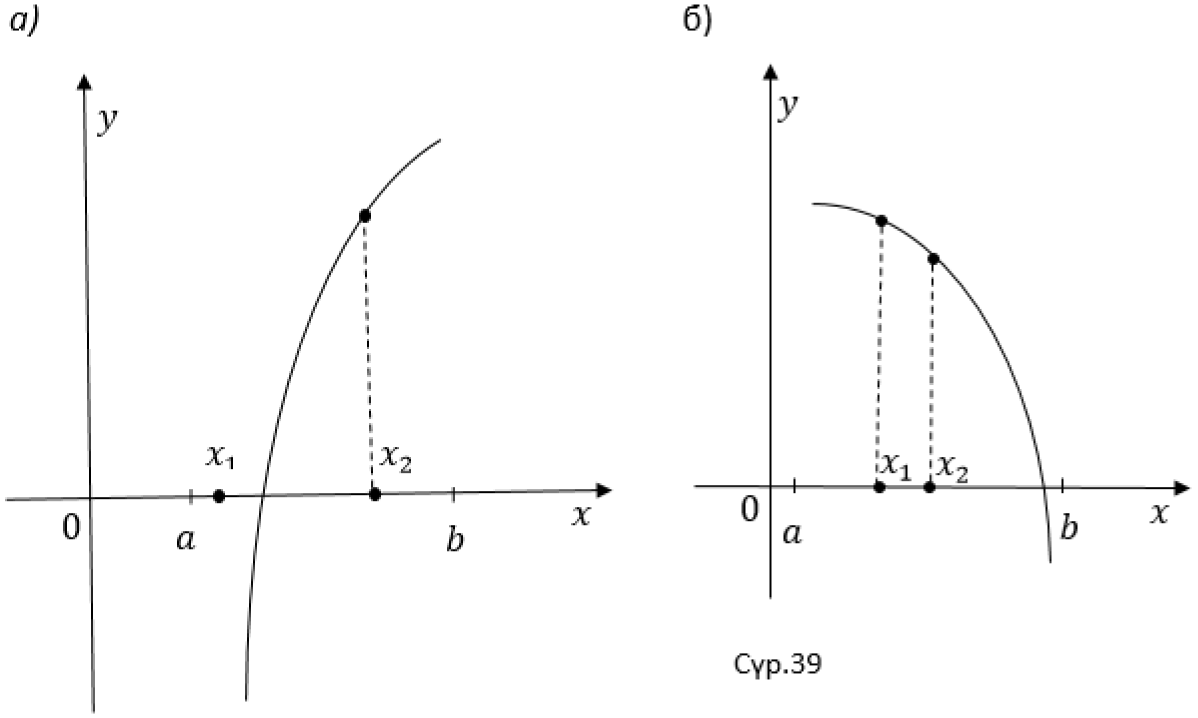
535. $y=x^2e^{-\frac{1}{x}}$.

536. $y=\frac{\ln(1+x)}{x}$.

537. $y=\frac{\sin x}{x}$.

538. $y=(x+1)e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}$.

2. Функциянын монотондуулук шарттары. Эгерде каалагандай $x_1 < x_2$ үчүн, бул интервалдан (сүр.39, a)



Сүр.39

$$a < x_1 < x_2 < b \text{ болгондо } \quad f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (4)$$

шарты аткарылса, $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында монотондуу өсүүчү деп аталат.

Эгерде каалагандай $x_1 < x_2$ үчүн, бул интервалдан (сүр.39, б)

$$a < x_1 < x_2 < b \text{ болгондо } \quad f(x_1) \geq f(x_2). \qquad (5)$$

шарты аткарылса, $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында монотондуу кемүүчү деп аталат.

Функциялардын монотондуулук (4) жана (5) шартын көбүнчө кеңири мааниде монотондуулук шарттары деп аташат.

Эгерде (4) жана (5) шарттарында барабардык белгиси жок болсо, $f(x)$ функциясы анык монотондуу деп айтышат. Дифференцирленүүчү функция (a, b) интервалында монотондуу өсүүчү болот, качан гана

$$a < x < b \text{ болгондо } \quad f'(x) \geq 0, \qquad (6)$$

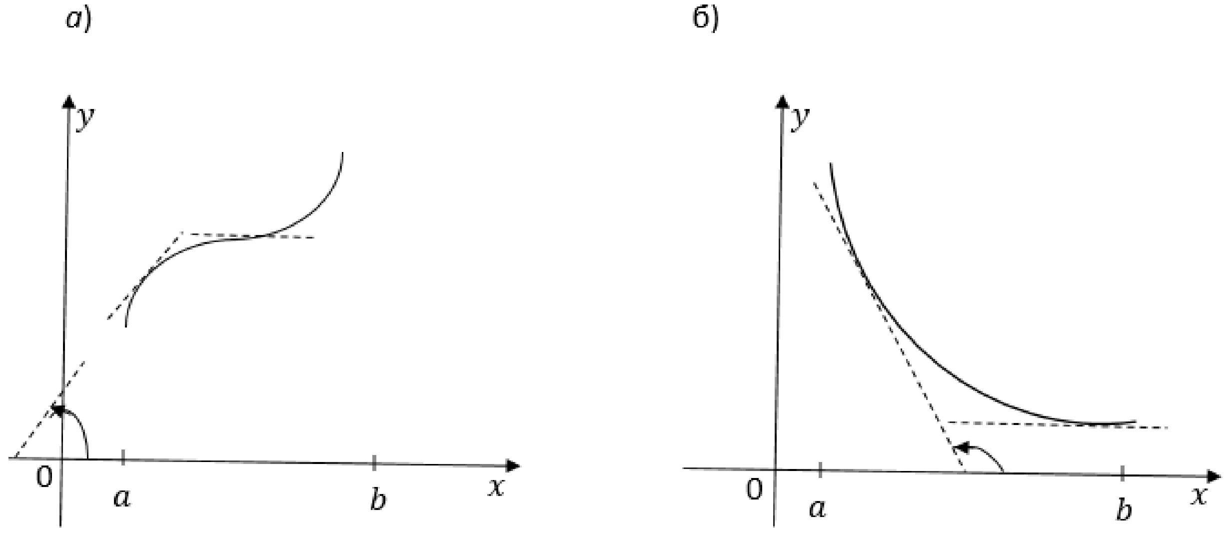
жана монотондуу кемүүчү болот, эгерде

$$a < x < b \text{ болгондо } \quad f'(x) \leq 0, \qquad (7)$$

Дифференцирленүүчү функция үчүн (4) шарты (6) шартына эквиваленттүү, (5) шарты – (7) шартына.

Качан гана (a, b) интервалына таандык болгон x тин баардык маанилери үчүн $f'(x) = 0$ болсо, $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында $f(x) = C$ турактуу.

(6) геометриялык формуласы, монотондуу өсүүчү функциянын графикке жанымасы Ox огунун оң багыты менен тар бурчту түзөт же ага паралелдүү (сүр. 40, a).



Сүр. 40

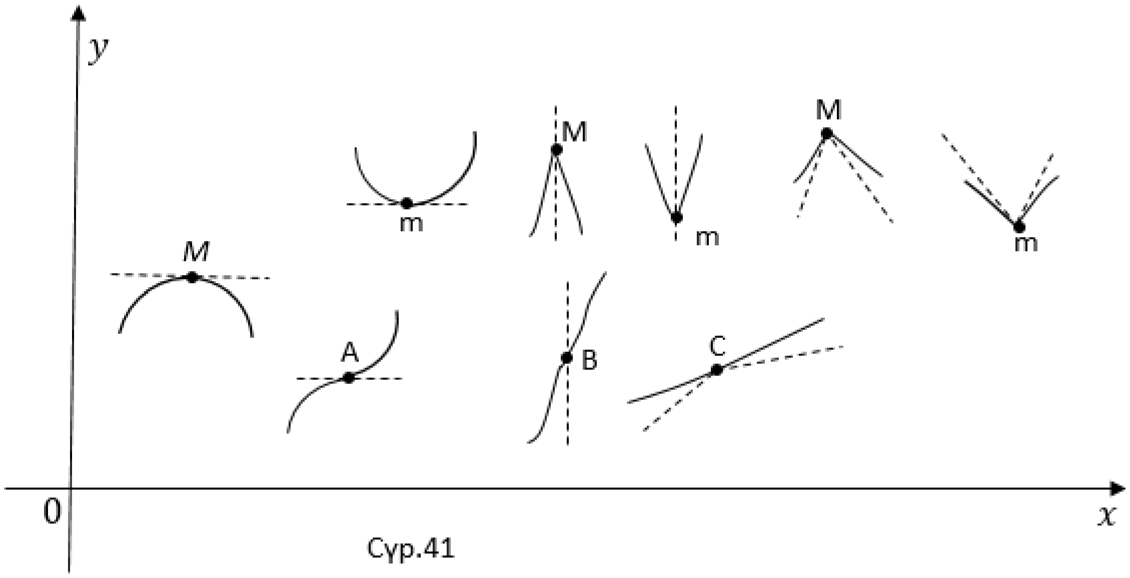
Монотондуу кемүүчү функциянын графикке жанымасы Ox огунун оң багыты менен кең бурчту түзөт же ага паралелдүү (сүр. 40, б).

$x = x_0$ чекити биринчи түрдөгү сыналуу чекити, же жөн эле сыналуу деп аталат, эгерде төмөнкү шарттардын бирөөсү орун алса:

1) $f^1(x_0) = 0$;

2) $f'(x_0) = \infty$;

3) $f(x)$ функциясы $x = x_0$ чекитинде аныкталган, бирок $f'(x_0)$ жашабайт. Геометрикалык түрдө бул шарттар,эгерде 1 шарты аткарылса сыналуу чекитте жаныма же Ox огуна параллел, же Oy огуна параллел болот эгерде 2 шарты аткарылса, эгерде 3 шарты орун алса жаныма такыр жашабайт (сүр.41).



Сүр.41

1) Бардык чекиттеринде (6) же (7) барабардыгы аткарылган (a,b) интервалы $f(x)$ функциясынын монотондуулук интервалы деп аталат.Бул интервалдарды табыш үчүн сандык окко функциянын аныкталуу областынын чектик чекиттерин жана бардык сыналуу чекиттерин жайгаштыруу керек. Бул учурда сандык ок бир нече интервалдардын санына бөлүнөт, алардын ар биринде туунду белгисин өзгөртбөйт. Бул монотондуулук интервалдары болушат. Берилген монотондуулук интервалдарда функция өсүүчү же кемүүчү болоорун билүү үчүн бул интервалдын кандайдыр бир чекитинде туунду кандай белгиге ээ болоорун билүү жетиштүү. Эгерде бул чекитте $f'(x) > 0$ болсо, анда функция өсөт, эгерде $f'(x) < 0$ болсо, анда кемийт.

539. Функциянын монотондуулук интервалдарын аныктагыла

$$f(x) = x^2 - 6x + 8.$$

Чыгаруу. Функция бардык жерде туундуга ээ:

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3).$$

$x = 3$ сынаалуу чекити болот, анткени анда туунду нөлгө айланат. Бул чекит сандык окту монотондуулуктун эки $(-\infty, 3)$ жана $(3, +\infty)$ интервалына бөлөт. Мисалы биринчи интервалдан кандайдыр бир $x = 0$ чекитин алабыз, анда $f'(0) = -6 < 0$. Демек, $(-\infty, 3)$ интервалында функция кемийт. $x = 4$ чекити экинчи интервалда жатат жана $f'(4) = 2 > 0$, анда бул интервалда функция өсөт.

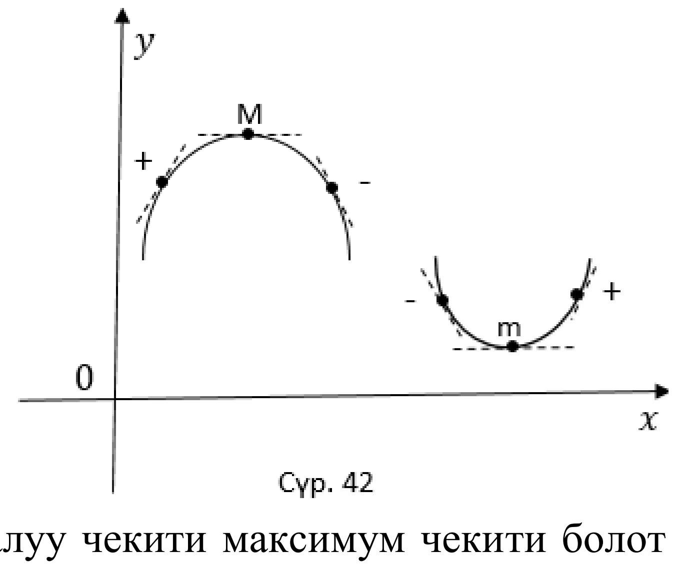
Төмөнкү мисалдарда функциянын монотондуулук интервалдарын аныктагыла:

540. $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$. **542.** $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

541. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$. **543.** $f(x) = x + \cos x$.

3. Локалдык экстремум. Эгерде $(x_0 - h, x_0 + h)$ аймагы жашап, бардык чекиттер үчүн $f(x) < f(x_0)$ $\big(f(x) > f(x_0)\big)$ шарты аткарылса, $f(x)$ функциясы $x = x_0$ чекитинде максимумга (минимумга) ээ болот. Максимум жана минимум чекити экстремум чекити деп аталат. Функциянын максимумун M тамгасы менен жана минимумун – m тамгасы менен белгилөө кабыл алынган. Үзгүлтүксүз функциялар үчүн экстремум бир гана сыналуу чекиттеринде болот. 41- сүрөттөн көрүнүп тургандай, бирок бул шарт жетишерлик эмес. A,B,C чекиттеринде тиешелүү 1,2,3 шарттары аткарылган, бирок бул чекиттерде максимум да, минимум да жок.

Экстремумдун биринчи жетишерлик шарты. Эгерде сыналуу чекитинен өтүүдө биринчи туунду белгисин өзгөртсө, анда ошол сыналуу чекити экстремум чекити болот.



Сүр. 42

$x = x_0$ сыналуу чекити максимум чекити болот $(f(x_0) = M)$ (сүр. 42), эгерде

$h > 0$ болгондо $f'(x_0 - h) > 0$ жана $f'(x_0 + h) < 0$,

жана минимум чекити $(f(x_0) = m)$, эгерде

$h > 0$ болгондо $f'(x_0 - h) < 0$ жана $f'(x_0 + h) > 0$,
жана $h > 0$, $(x_0 - h, x_0 + h)$ интервалында жалгыз сыналуу чекитине ээ жана бул интервалдын бардык жеринде функция аныкталган.

Эгерде биринчи туунду сыналуу чекиттен өтүүдө белгисин өзгөртбөсө, анда бул чекитте функция экстремумга ээ эмес.

Бул эрежени колдонууда биринчи туундунун белгилеринин өзгөрүшүнүн таблицасын түзүү ыңгайлуу.

Таблица 4

	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < x_4$	и.т.д.
$f'(x)$		-	0	+	ж-т	+	
$f(x)$		↘	m	↗	а.э.	↗	

Мында x_1 «$-\infty$» болушу мүмкүн жана таблицанын биринчи мамычасы толтурулбайт; а.э. деген функция аныкталган эмес дегенди билдирет; ж-т – туунду жашабайт. Биринчи жолчодо монотондуулуктун интервалдары жана алардын чектик чекиттери көрсөтүлөт. Экинчи жолчону толтуруш үчүн монотондуулук интервалынан каалагандай $x = a_1$ маанини алуу керек, $f'(a_1)$ди эсептеп жана алынган санды таблицага жазабыз. Үчүнчү жолчодо экинчи жолчонун «$-$» белгисинин астына функциянын кемүүсүн билдирген «↘» белги коюлат (4 шартын кара), ал эми «+» белгисинин астына функциянын өсүүсүн билдирген «↗» белги коюлат (3 шартын кара). Үчүнчү жолчого максимум M жана минимум m маанилери дагы коюлат.

Эгерде сыналуу чекитинде $f'(x_0) = 0$ шарты аткарылса жана бул чекитте функция жогорку тартиптеги туундуларга ээ болсо, анда экстремумдун чекиттерин табуунун башка жетишерлик шартын колдонууга болот.

Экинчи жетиштүү шарт. $x = x_0$ сыналуу чекити функциянын экстремум чекити болот, эгерде ушул чекитте нөлгө айланбаган биринчи туунду жуп тартипке ээ болсо. Ошону менен

бирге, эгерде бул туунду терс (оң) болсо, анда $x = x_0$ сыналуу чекит максимум (минимум) чекити болот. Мисалы, $f'(x_0) = 0$ жана $f''(x_0) \neq 0$ шарттары аткарылсын, анда

$$\text{эгерде } f''(x_0) < 0, \text{ анда } f(x_0) = M;$$

$$\text{эгерде } f''(x_0) > 0, \text{ анда } f(x_0) = m.$$

544. Экстремумдук маанилерди аныктап, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ функциясынын монотондуулук интервалын көрсөткүлө.

Чыгаруу.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3),$$

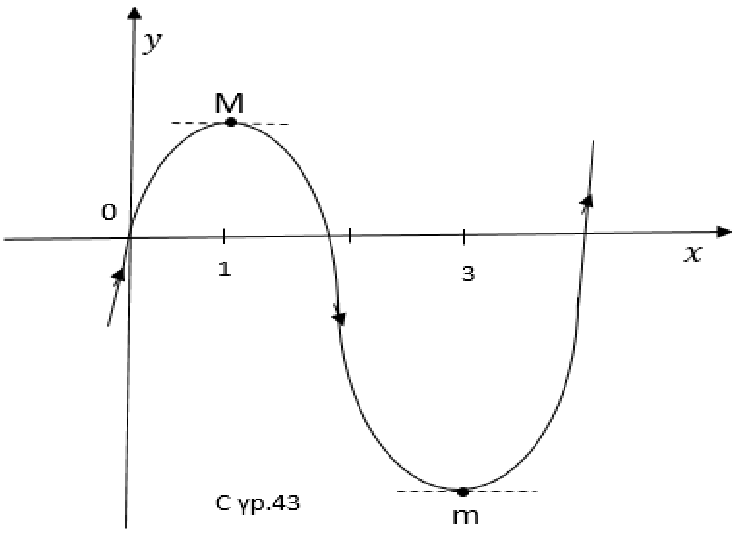
анда сыналуу чекиттери $x_1 = 1$ жана $x_2 = 3$. Бул сыналуу чекиттердин мүнөзүн изилдөөнү биринчи жетиштүү шарттын жардамы менен жүргүзөбүз. Ал үчүн таблицаны түзөбүз:

Таблица 5

	$(-\infty, 1)$	$x_1 = 1$	$(1, 3)$	$x_2 = 3$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	M =1	↘	m = -3	↗

Ошентип, $(-\infty, 1)$ жана $(3, \infty)$ интервалдарында функция өсөт, $(1, 3)$ интервалында – кемийт. $x_1 = 1$ чекити максимум чекити болот, $x_2 = 3$ чекити – минимум. Функциянын экстремумдук маанилери: максимум

$M = f(1) = 1$ минимум $m = f(3) = -3$. Функциянын графиги сүр. 43тө



Cүр.43

көрсөтүлгөн.

545. Функциянын экстремум чекиттерин аныктагыла $f(x) = x^{2/3} \cdot \frac{1}{x+2}$.

Чыгаруу. Функция $x = 2$ чекитинен башка бардык жерде жашайт, б.а. $(-\infty, -2)$; $(-2, \infty)$ интервалдарында. Сыналуу чекиттерин аныктайбыз:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2) - x^{\frac{2}{3}}}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-3x}{3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2} = \frac{4-x}{3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2};$$

$x = 4$ болгондо $f'(x) = 0$, $x = 0$ жана $x = -2$ болгондо $f'(x) = \infty$.

Ошентип, $x_1 = 4$ жана $x_2 = 0$ берилген функциянын сыналуу чекиттери болушат ($x = -2$ сыналуу чекити болбойт, анткени $x = -2$ болгондо функция аныкталган эмес). $f'(x)$ тин белгилеринин өзгөрүшүнүн таблицасын түзөбүз:

Таблица 6

	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x < \infty$
$f'(x)$	-	∞	-	∞	+	0	-
$f(x)$	↘	а.э.	↘	m =0	↗	$M = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	↘

$x = -3$ болгондо $f'(-3) < 0$, ошондуктан $(-\infty, -2)$ интервалында $f'(3) < 0$. Ушундай эле жолдор менен башка интервалдарда $f'(x)$ белгилерин аныктайбыз. 6-таблицадан көрүнүп тургандай $f(0) = m$ жана $f(4) = M$. Минимум чекитинде жаныма Oy огуна параллел (минимум курчутуу чекиттерине ээ болот, сүр.41ди кара).

m жана Mдин маанилерин табабыз:

$$m = f(0) = 0, M = f(4) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}.$$

Берилген мисалда $x = 0$ сыналуу чекитинин мүнөзүн аныктоо үчүн экинчи жетиштүү шартты колдонуу мүмкүн эмес болду, анткени бул чекитте функция дифференцирленленүүчү эмес.

546. Функциянын экстремум чекиттерин аныктагыла $f(x) = x^3e^{-x}$.

Чыгаруу. Сыналуу чекиттерин табабыз:

$$f'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(3-x);$$

$x_1 = 0$ жана $x_2 = 3$ болгондо $f'(x) = 0$. $x_1 = 0, x_2 = 3$ сыналуу чекиттери болот. Функция бардык жерде дифференцирленүүчү болгондуктан, экстремумдун экинчи жетиштүү шартын колдонуу ыңгайлуу. $f''(x)$ти аныктайбыз:

$$f''(x) = 2xe^{-x}(3-x) - x^2e^{-x}(3-x) - x^2e^{-x}$$
$$= xe^{-x}(x^2 - 6x + 6);$$

сыналуучу чекиттерди коюп, төмөнкүнү алабыз

$$f''(0) = 0, f''(3) = 3e^{-3}(9 - 18 + 6) < 0.$$

Экинчи жетиштүү шартын негизинде $x_2 = 3$ чекитинде функция максимумга ээ

$M = f(3) = 27e^{-3}$.

$x_1 = 0$ сыналуу чекитинин мүнөзү азырынча аныкталган эмес, анткени $f''(0) = 0$. $f'''(0)$ дү табабыз:

$$f'''(x) = -e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x) + e^{-x}(3x^2 - 12x + 6)$$
$$= e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6),$$
$$f'''(0) = 6 \neq 0.$$

$x = 0$ чекитинде биринчи үчүнчү тартиптеги (так эмес) туунду.нөлдөн айырмалананат. Демек, $x = 0$ чекити экстремум чекити болбойт. Бул фактыны оңой эле түздөн-түз туундунун туюнтмасынан көрүүгө болот.Чындыгында x^2 көбөйтүүчү жана аны менен $f'(x)$ туунду $x = 0$ чекитинен өткөндө белгисин өзгөртбөйт.

Төмөнкү мисалдарда функциянын экстремум чекиттерин тапкыла:

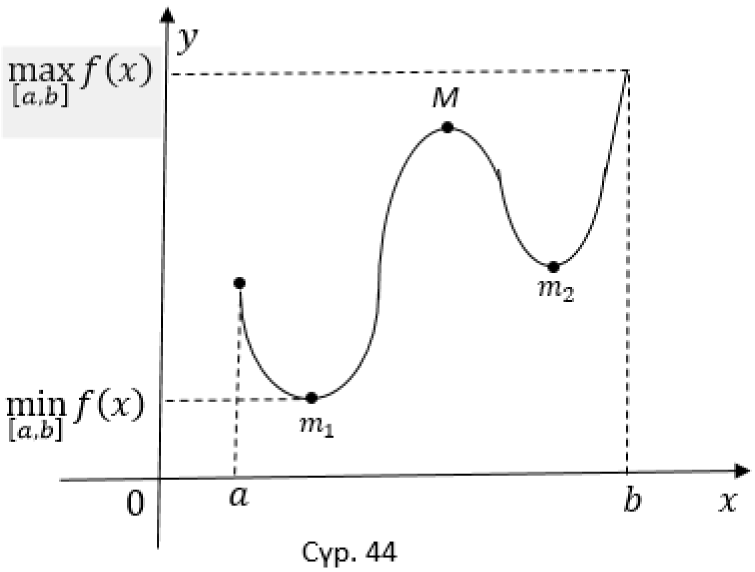
547. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$ **550**. $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$

548. $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} + arctgx.$ **551.** $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)(x+3)}.$

549. $f(x) = \frac{e^x}{(x+3)^2}.$

4. Кесиндиде жана интервалда функциянын экстремуму. $a \leq x \leq b$ кесиндисиндеги функциянын эң чоң мааниси $\max\limits_{[a,b]} f(x)$ менен белгиленет, эң кичине мааниси - $\min\limits_{[a,b]} f(x)$.

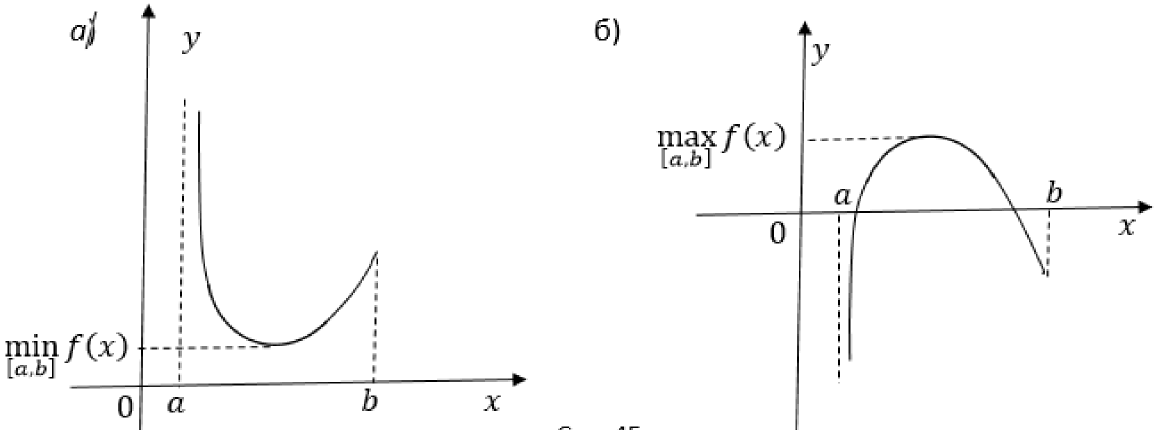
$[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция дайыма өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерине жетишет. $\max\limits_{[a,b]} f(x)$ аныкташ үчүн $[a, b]$ кесиндисинде бардык максимумдардын маанисин эсептеш керек, функциянын маанилерин кесиндинин учтарында $f(a)$ жана $f(b)$ эсептеп жана бул сандардын эң чоңун алуу керек (сүр. 44).



Сүр. 44

$\min f(x)$ ти табыш үчүн бардык минимумдардын маанилерин жана интервалдын учтарындагы маанилерин эсептеп жана алынган сандардын эң кичинесин алуу керек (сүр. 44 кара). Интервалдагы үзгүлтүксүз функция, көбүнчө чексиз интервалда, функция өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерине жетпей калышы мүмкүн экендигин эске алуу керек.

Эгерде үзгүлтүксүз функция интервалда жалгыз экстремалдык чекитке ээ болсо, мисалы минимум (максимум), анда ушул интервалдагы бул чекитте сөзсүз эң чоң жана (эң кичине) функциянын маанисине жетишет (сүр. 45).



Сүр. 45

552. $[-1, 4]$ кесиндисинде $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ функциясынын эң чоң жана эң кичине маанилерин аныктагыла.

Чыгаруу. Максимум жана минимум чекиттерин аныктайбыз:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),$$

$$f''(x) = 6x - 6;$$

$x = 0$ жана $x = 2$ болгондо $f'(x) = 0$. $x_1 = 0$ жана $x_2 = 2$ сыналуу чекиттери болушат, алар үчүн $f''(0) < 0, f''(2) > 2$; демек,

$$f(0) = M \text{ жана } f(2) = m;\ M = f(0) = 1, m = f(2) = -3.$$

Функциянын маанилерин интервалдын учтарында эсептейбиз:

$$f(-1) = -3, f(4) = 17.$$

Аягында төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\max_{[-1,4]} f(x) = \max\{f(-1), f(4), M\} = \max\{-3, 17, 1\} = 17,$$

$$\min_{[-1,4]} f(x) = \min\{f(-1), f(4), m\} = \min\{-3, 17, -3\} = -3.$$

$-1 \le x \le 4$ болгондо функция кесиндинин оң $x = 4$ учунда эң чоң маанини кабыл алат. Эң кичине мааниге эки чекитте, функциянын минимум чекитинде жана $x = -1$ болгон интервалдын сол учунда жетишет.

553. $(0, \infty)$ интервалында $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ функциясынын эң чоң маанисин аныктагыла.

Чыгаруу. $(0, \infty)$ интервалынын баарында функция дифференцирленүүчү. Максимум чекиттерин табабыз:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

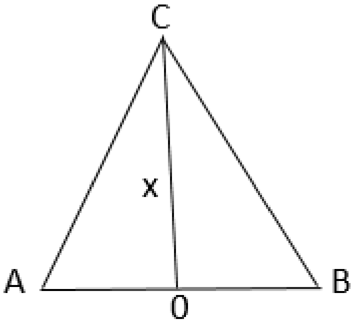
$1-\ln x=0$ болгондо $f'(x)=0$, мындан $x=e$ сыналуу чекити болот; $x=0$ болгондо $f'(x)=\infty$, бирок бул чекит сыналуучу болбойт, анткени функция анда аныкталган эмес;

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x(3-2\ln x)}{x^4}=-\frac{3-2\ln x}{x^3},$$

$f''(e)<0$, ошентип $x=e$ чекитинде функция $M=f(e)=\frac{1}{e}$ максимумга ээ болот. Функция $(0,\infty)$ интервалында жалгыз максимум чекитине ээ, ошондуктан $\max\limits_{(0,\infty)} f(x)=M=\frac{1}{e}$.

554. Каптал жагы l ге барабар болгон тең капталдуу үч бурчтуктун максималдуу аянтын аныктагыла.

Чыгаруу. Үч бурчтуктун бийиктигин x менен белгилейбиз (сүр. 46).



Сүр. 46

Анда $AB=2\sqrt{l^2-x^2}$ жана $S_{ABC}=\frac{1}{2}\,OC\cdot AB=x\sqrt{l^2-x^2}$. Ошентип үч бурчтуктун аянты, бул үч бурчтуктун бийиктигинин функциясы катары туюнтулган.

Эми алгачкы маселе төмөнкүдөй түрдө көрсөтүлүшү мүмкүн: $[0,l]$ кесиндисинде $S(x)=x\sqrt{l^2-x^2}$ функциясынын эң чоң маанисин аныктоо. Функциянын маанилерин кесиндинин учтарында $S(0)=0, S(l)=0$ эсептейбиз. Анткени аянт – терс эмес чоңдук, анда интервалдын ичинде функция максимумга жетээри айкын.

$S'(x)$ ти табабыз:

$$S'(x)=\sqrt{l^2-x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{l^2-x^2}}=\frac{l^2-2x^2}{\sqrt{l^2-x^2}}\ ;$$

$x = \pm\frac{l}{\sqrt{2}}$ болгондо $S'(x) = 0$ жана $x = \pm l$ болгондо $S'(x) = \infty$. Бизди бир гана $x_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}$ чекити кызыктырат, анткени $x = -\frac{l}{\sqrt{2}}$,$x = -l$ чекиттери $[0, l]$ кесиндисинген сырткары жатат, ал эми $x = l$ чекитиндеги функциянын мааниси эсептелген: $S(l) = 0$.

Кээ бир конкреттүү мазмундагы мисалдарда сыналуу чекитинин мазмунун аныктоо жалпы учурга караганда жеңилирээк. Мисалы, берилген мисалда $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$ чекитинде $S(x)$ функциясы максимумга жетээрин оңой эле көрүүгө болот. Чындыгында эле, $S(x)$ функциясын $(0, l)$ интервалында кароо туура болоору мурда белгиленген. Бул интервалда ал оң жана анын учтарында нөлгө умтулат; мындан интервалдын ичинде функция максимумга жетиш керек, бирок жалгыз сыналуу чекити бар, анда ушул чекит максимум чекити болот жана эң чоң маанидеги чекит экендиги келип чыгат. Үч бурчтуктун максималдык аянтын эсептейбиз:

$$S_{\max} = S(l/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(l^2 - \frac{l^2}{2}\right)} = \frac{l^2}{2}.$$

555. Эки көчөдө туруктуу u_1 жана u_2 ылдамдыктары менен эки автомашина кесилишти көздөй жөнөштү. Көчөлөр тик бурч боюнча кесилишет деп эсептеп жана убакыттын кандайдыр бир моментинде автомашиналар кесилиштен a_1 жана a_2 аралыкта жайланышканын билип, канча убакыттан кийин алардын арасындагы аралык эң кичине болоорун аныктагыла.

Чыгаруу. Машина t убакыт ичинде u_1 ылдамдыгы менен жүрүп $u_1 t$ жолун өтөт жана кесилиштен $|a_1 - u_1 t|$ аралыкта жайланышкан. Экинчи машина t убакыттан кийин кесилиштен $|a_2 - u_2 t|$ аралыкта жайланышкан. Машиналардын арасындагы l аралыкты t убакыттан функция катары туюнтабыз:

$$l(t) = \sqrt{(a_1 - u_1 t)^2 + (a_2 - u_2 t)^2}.$$

$$l'(t) = \frac{2[(a_1 - u_1t)(-u_1) + (a_2 - u_2t\ )(-u_2)]}{2\sqrt{(a_1 - u_1t)^2 + (a_2 - u_2t)^2}}$$

$$= \frac{a_1u_1 + a_2u_2 - t(u_1^2 + u_2^2)}{\sqrt{(a_1 - u_1t)^2 + (a_2 - u_2t)^2}};$$

$t_1 = \frac{a_1u_1 + a_2u_2}{u_1^2 + u_2^2}$ чекитинде $l'(t_1) = 0$. Бул сыналуу чекит аркылуу өтүүдө $l'(t)$ белгисин - тан + ка өзгөртөт. Демек, t_1 моментинде функция минимумга жетишет.

$l'(t)$ функциянын бөлүмү $\frac{a_1}{a_2} = \frac{u_1}{u_2}$ шартында гана нөлгө айланышы мүмкүн, ал машиналар кесилиште жолуга турган учурга туш келет. Мында бул жеке учурду карабай, $l(t)$ функциясы $(0, \infty)$ интервалында жалгыз экстремумга ээ – минимум экендигин аныктоого болот. Пункттун башталышында жасалган эскертүүнүн негизинде, функция өзүнүн эң кичине маанисине интервалдын минимум чекитинде жетишет.

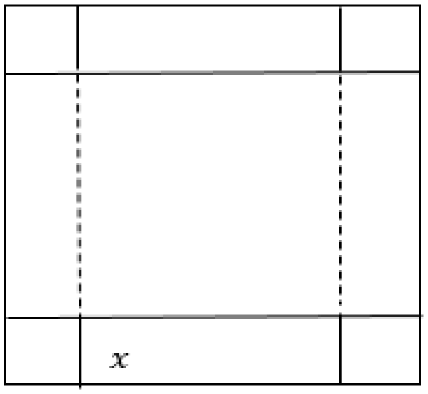
Төмөнкү мисалдарда функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин аныктагыла:

556. $[-2, 1]$ кесиндисинде $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

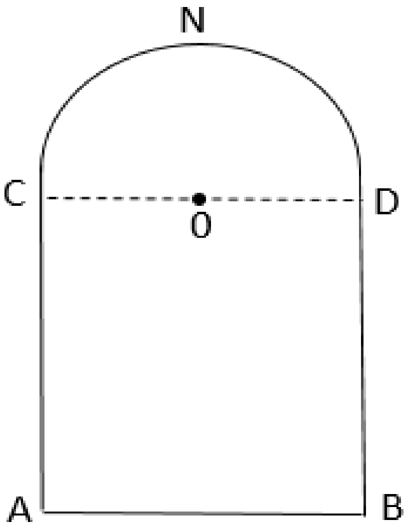
557. $[-1, 3]$ кесиндисинде $f(x) = \frac{4-x^2}{4+x^2}$.

558. $[-2, 1]$ кесиндисинде $f(x) = \sqrt[3]{2x^2} + 1$.

559. 12х12 (см^2) өлчөмдөгү квадраттык картондун бурчтарынан пунктирдик сызыктар боюнча бүктөп (сүр. 47), бирдей квадраттарды кесип алып эң чоң өлчөмдөгү коробканы алуу керек. Кесилип алынган квадраттын жагы кандай болуш керек?



Сүр. 47



Сүр. 48

560. Терезе жарым айлана менен бүткөн тик бурчтук формасына ээ. Берилген периметрде эң чоң аянтка ээ болгон терезенин өлчөмүн аныктагыла (сүр. 48).

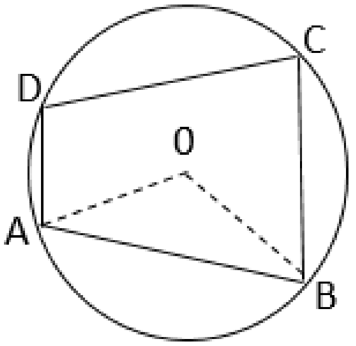
561. 66 санын эки оң кошулуучунун суммасы түрүндө, ал сандардын көбөйтүндүсү эң чоң боло тургандай кылып көрсөткүлө.

562. R радиустагы айлананын ичине сызылган тең капталдуу үч бурчтуктун эң чоң аянтын аныктагыла.

563. r радиустагы айлананын сыртына сызылган тең капталдуу үч бурчтуктун эң кичине аянтын аныктагыла.

564. R радиустагы айлананын ичине сызылган төрт бурчтуктун максималдуу аянтын аныктагыла.

Көрсөтмө. Маселени үч бурчтуктун эки чокусу айланада, ал эми бирөө айлананын борборунда жаткан эң чоң аянтын табууга алып келүү керек (сүр.49).



Сүр. 49

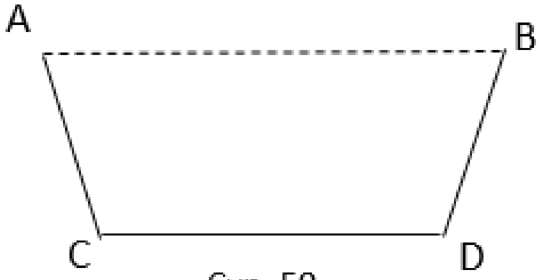
565. p периметри менен берилген тик бурчтуу үч бурчтуктун кайсынысы эң чоң аянтка ээ?

566. Диаметри d болгон тегерек жыгачтан негизи b жана бийиктиги h болгон тик бурчтуу кесилиштеги балканы кесип алуу талап кылынат. Балканын бекемдиги $b\,h^2$ пропорционалдуу. b жана h тын кандай маанилеринде балканын бекмдиги эң чоң болот?

567. Цилиндирлик формадагы ачык бакка V л жайгаштыруу керек. Кандай бийиктикте жана бактын негизинин радиусунда, аны жасоо үчүн эң кичине сандагы материал кетет ?

568. Тегеректен борбордук бурчу α болгон сектор кесилип алынган. Тегектин калган бөлүгүнөн воронка оролгон. α бурчунун кандай маанисинде воронканын сыйымдуулугу эң чоң болот?

569. Туурасы 60 см калай тилкеси ачык канал түрүндө ийилиш керек, аны туурасынан кескенде трапециянын формасына $AC = CD = DB$ ээ болгондой болсун (сүр. 50). Кубаттуулугу эң чоң боло тургандай каналдын AB туурасын аныктагыла.



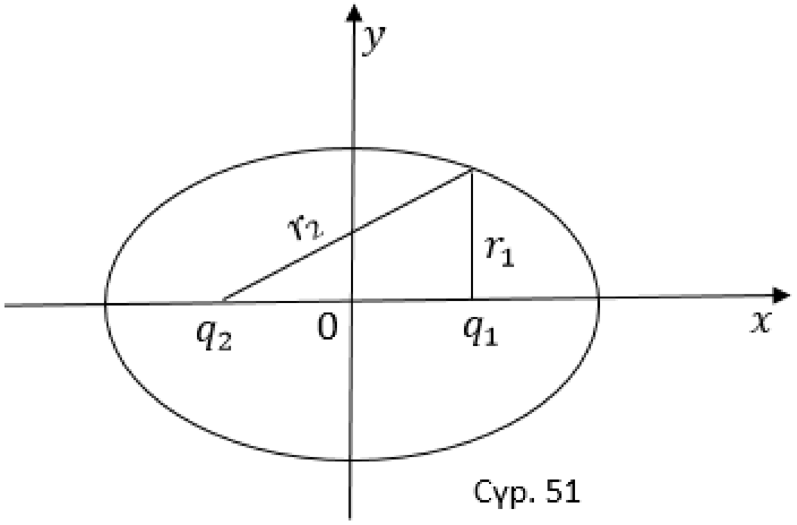
Сүр. 50

570. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипстин ичине эллипстин окторуна параллел болгон, жактары менен эң чоң аянтка ээ болгон тик бурчтукту жазгыла.

571. Чоң жарым огу $a = 2$ жана эксцентриситети $e = \frac{1}{2}$ болгон эллипстин фокусуна $q_1 = 2$ жана $q_2 = 1$ чекиттик зарядтар жайгаштырылган (сүр. 51). Берилген эллипсте бул зарядтардын потенциалынын эң чоң жана эң кичине маанилеринин чекиттерин тапкыла.

Көрсөтмө. Чекиттик заряддын потенциалы $u(r) = \frac{q}{r}$, мында r – чекиттен зарядка чейинки аралык, q – заряддын чоңдугу. Зарядтардын суммасынын потенциалы потенциалдардын суммасына барабар.

$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex, \quad r_1 + r_2 = 2a$ формулаларын колдонгула.



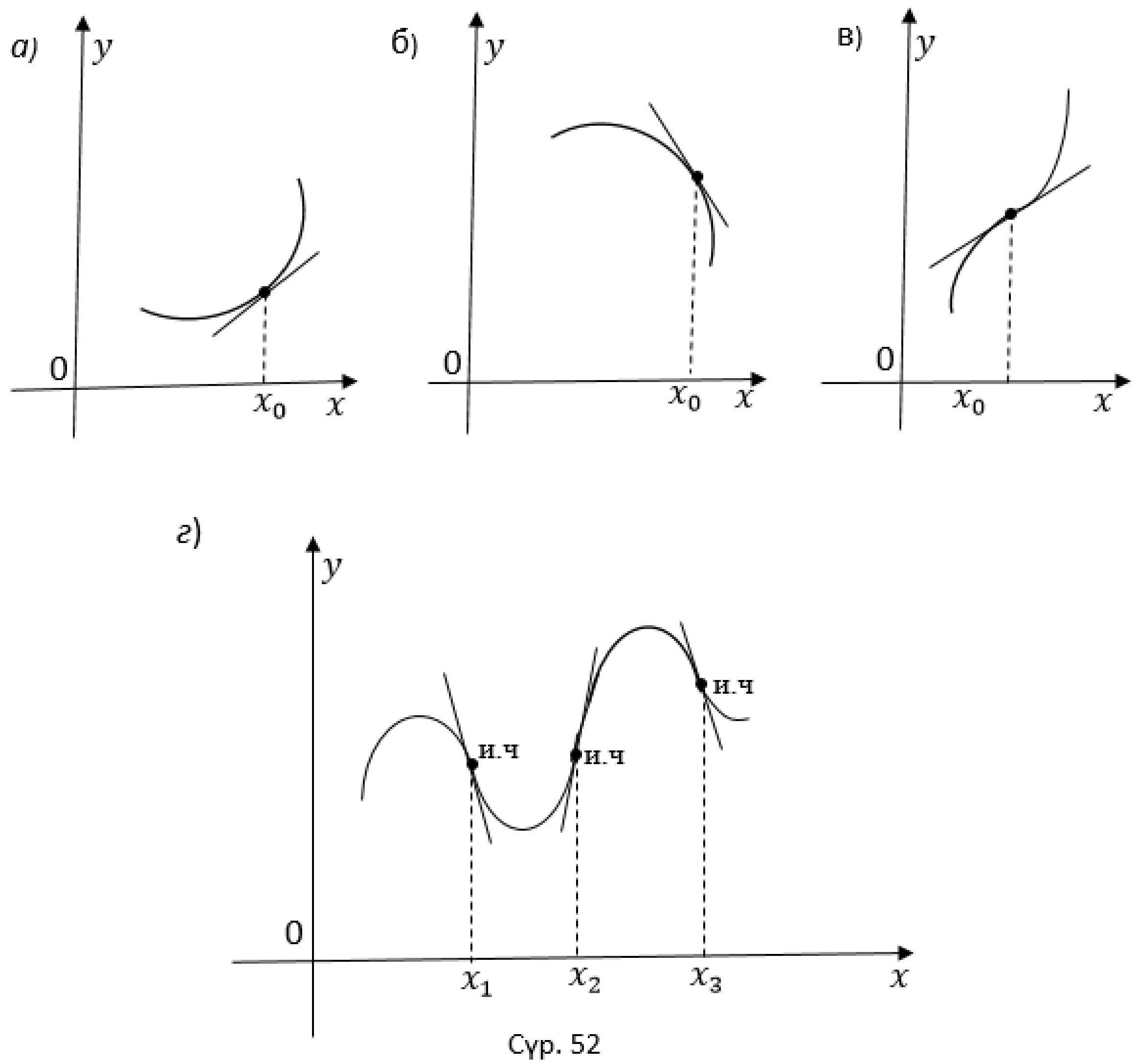
Сүр. 51

572. Эгерде **571** шарттарында $q_1 > 0$ жана $q_2 < 0$ деп эсептесек, потенциалдын эң чоң жана эң кичине маанилеринин чекити кандай жайланышат?

573. A(a шам) жана B (b шам) эки жарыктын булагын туташтыруучу $AB=d$ кесиндисинде эң кичине жарыктандыруучу M чекитин тапкыла.

Көрсөтмө. Жарыктандыруу булактын аралыгынын квадратына тескери пропорционалдуу.

5. Ийилүү чекиттери. Жылма ийри $x = x_0$ чекитинде жогору карай ийилген, эгерде бул чекиттин $(x_0 - h, x_0 + h)$ аймагы жашап, ийри ушул чекитке жүргүзүлгөн жаныманын үстүндө жайгашса (сүр. 52, *а*), жана ийри $x = x_0$ чекитинде төмөн карай ийилген, эгерде ийри ушул чекитке жүргүзүлгөн жаныманын төмөн жагында жатса (сүр. 52, б).



Сүр. 52

Эгерде x_0 чекитине жүргүзүлгөн жаныма ийрини кээ бир аймактардагы жаныма чекиттер жанымадан ар түрлүү жактарда жаткан эки бөлүккө бөлсө, анда $x = x_0$ чекити ийилүү чекити деп аталат (сүр. 52, в). Экстремум чекиттери функциянын өсүү жана кемүү интервалдарын өзүнчө бөлсө, ийилүү чекити ийринин ийилүүсүнүн туруктуу багытынын интервалдарын өзүнчө бөлөт (сүр. 52, г).

Эгерде интервалдан ар бир чекитинде

$$a < x < b \text{ болгондо } f'(x) > 0 \qquad (8)$$

шарты аткарылса, (a, b) интервалында ийри жогору карай ийилген (◡ белгилешет), жана төмөн карай ийилген (⌒ белгилешет), эгерде

$$a < x < b \text{ болгондо } f'(x) < 0 \qquad (9)$$

$x = x_0$ чекити 2 түрдөгү сыналуу чекити деп аталат, эгерде бул чекитте төмөнкү шарттардын бирөө орун алса:

1. $f''(x_0) = 0$, 2) $f''(x_0) = \infty$, 3) $f''(x_0)$ жашабайт жана функция өзү $x = x_0$ чекитинде аныкталган.

Функциянын ийилүү чекити 2 түрдөгү сыналуу чекиттердин арасында жайгашкан. Берилген 2 түрдөгү сыналуу чекити ийринин ийилүү чекити болоорун орнотуш үчүн, эрежени жетекчиликке алыш керек: эгерде экинчи түрдөгү сыналуу чекити аркылуу өткөндө, функциянын экинчи тартиптеги туундусу белгисин өзгөртсө, анда берилген чекит ийилүү чекити болот. Бул эрежени колдонуп, биринчи туундунун белгилеринин өзгөрүлүшүнүн § 4тө каралгандайга окшош эле, экинчи туундунун белгисинин өзгөрүшүнүн таблицасын түзүү ыңгайлуу.

$f''(x)$ белгилеринин туруктуулугунун интервалы төмөнкүдөй түрдө табылат: сандык окто жашоо областынын чектик точкаларын жана 2 түрдөгү сыналуу чекиттерин колдонот. Ар бир алынган интервалдан $f''(x)$ белгисин өзгөртө албайт жана 1 же 2 шартка ылайык ийринин тиешелүү бөлүгү иймектиктин туруктуу багытына ээ болуш керек.

574. $f(x) = x^6 - 6x^5 + \left(\frac{15}{2}\right)x^4 + 3x$ функциясынын $f''(x)$ ийилүү чекитин жана белгисинин туруктуулугунун интервалын аныктагыла.

Чыгаруу. Функция аныкталган жана бардык x үчүн эки жолу дифференцирленүүчү. 2 түрдөгү сыналуу чекиттерди аныкташ үчүн $f''(x)$ ти табабыз:

$$f'(x) = 6x^5 - 30x^4 + 30x^3 + 3,$$

$$f''(x) = 30x^4 - 120x^3 + 90x^2 = 30x^2(x^2 - 4x + 3).$$

$f''(x)$ ти көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$f''(x) = 30x^2(x - 3)(x - 1).$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ 2- түрдөгү сыналуу чекиттери болушат. $f''(x)$тин белгилеринин өзгөрүлүшүнүн таблицасын түзөбүз:

Таблица 6

	$-\infty < x < 0$	$x_1 = 0$	$0 < x < 1$	$x_2 = 1$	$1 < x < 3$	$x_3 = 3$	$3 < x < \infty$
$f''(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\smile$		$\smile$	и.ч.	$\frown$	и.ч.	$\smile$

Мында и.ч. ийилүү чекитин билдирет.

$x = -1$ болгондо $f''(-1) = 240 > 0$. 2 шарты боюнча $(-\infty, 0)$ интервалында функция жогору карай ийилет. $x_1 = 0$ чекити аркылуу өтүүдө экинчи туунду белгисин өзгөртбөйт, анткени x^2 көбөйтүүчү белгисин өзгөртбөйт. Буга мисалы $x = \frac{1}{2}$ маанисин коюп көрсө болот. $x_1 = 0$ чекити ийилүү чекити болбойт.

$x_2 = 1$ чекити аркылуу өтүүдө $f''(x)$ белгисин өзгөртөт, анткени $(x-1)$ көбөйтүүчү $f''(x)$ туундусуна биринчи даражада кирет. $x_2 = 1$ чекити ийилүү чекити болот.

Ушуга окшош эле $x_3 = 3$ чекити дагы ийилүү чекити болот.

575. $f(x) = x^2 + 2\sin x$ функциясынын ийилүү чекитин тапкыла.

Чыгаруу. $f'(x)$ жана $f''(x)$ ти аныктайбыз.

$$f'(x) = 2x + 2\cos x,$$

$$f''(x) = 2 - 2\sin x = 2(1 - \sin x).$$

$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, 2 \ldots$ чекиттери экинчи түрдөгү сыналуу чекиттери болушат. Бирок, бул чекиттердин бирөөсү да ийилүү чекити болбойт, анткени ар бир жанаша интервалдардан $(\pi/2, 5\pi/2), (5\pi/2, 9\pi/2) \ldots \sin x < 1$, жана ошондуктан $f''(x) > 0$. Экинчи туунду сыналуу чекиттери аркылуу өтүүдө белгисин өзгөртбөйт. Демек, $(-\infty, \infty)$ бардык интервалында 1 шартына ылайык жогору карай ийилген.

Төмөнкү мисалдарда функциялардын ийилүү чекиттерин тапкыла:

576. $f(x) = x^5 - 5x^4 + \frac{20}{3}x^3 + 3x + 1.$

577. $f(x) = x + \cos x$.

578. $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+2}}$.

579. $f(x) = e^{-x^2} + 2x$.

580. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

§ 3.4. ГРАФИКТЕРДИ ТҮЗҮҮДӨГҮ ЖАЛПЫ СХЕМА

Мурдагы параграфтардагы каралган (карагыла § 2-3), функцияларды изилдөөнүн жеке элементтери , функциялардын графиктерин түзүү үчүн аппаратты чогуу түзүшөт. Мындан тышкары функцияларды түздөн-түз окуп үйрөөнүнү жана буга чейин сөз болгон (карагыла 4-бап § 2) элементардык функциялардын графиктерин колдонобуз.

Функциянын графигин түзүүнүн жалпы схемасы үч негизги этапка келтирилет:

1) Функциянын графигинин жалпы мүнөзүн аныктоо. Мында функциянын аныкталуу областын табуу, анын чегинде пределдик чектерди эсептөө, вертикалдык, горизонталдык жана жантайган асимптоталардын теңдемелерин, эгерде алар жашаса табуу, эгерде татаал эмес болсо графиктин координата октору менен кесилишүү чекиттерин табуу керек. Андан кийин жүргүзүлгөн изилдөөлөрдү канааттандырган графиктин болжолдуу түрүн түзүү керек.

2) Биринчи туундуну колдонуу менен графиктин мүнөзүн тактоо (экстремумдарды изилдөө, § 3).

3) Экинчи туундусу боюнча графиктин мүнөзүн тактоо (томпоктукка, ийметикке, ийилүү чекитти изилдөө, § 3).

581. Функциянын графигин түзүү

$$y = 3xe^x. \tag{1}$$

Чыгаруу. Функция $(-\infty, \infty)$ интервалынын бардык жеринде жашайт. $x \to \infty$ жана $x \to -\infty$ болгондо пределдик маанилерди жазабыз

$$\lim_{x\to+\infty} 3xe^x = +\infty. \tag{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3xe^x = 3\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 3\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \tag{3}$$

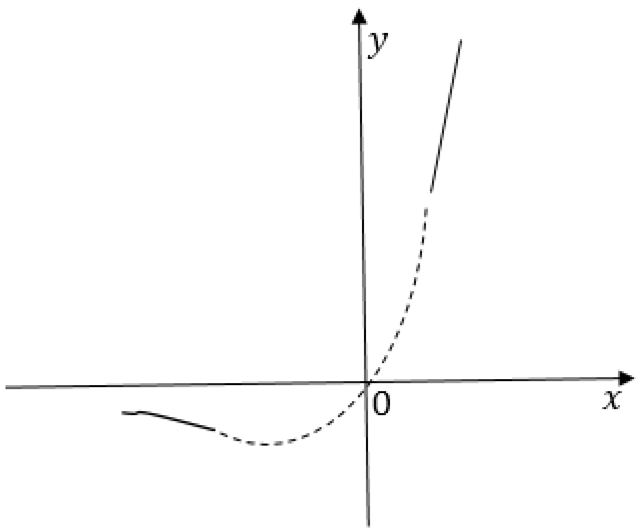
(биринчи учурда эки көбөйтүүчү чексиз чоң, экинчиде – Лопиталдын эрежесин пайдаландык). (3) пределдик шарты $x \to -\infty$ умтулганда график

$y = 0$ гоирзонталдык асимптотага ээ болоорун билдирет. (2) пределдик шарты $x \to +\infty$ умтулганда чексиз өсөөрүн көрсөтөт, бирок ошол эле учурда жантайган асимптота жашабайт,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3e^x = +\infty .$$

Графиктин координата октору менен кесилишкен чекиттерин табабыз: $x = 0$ болгондо $y(0) = 0$, б.а. график координата башталышы аркылуу өтөт.

Жүргүзүлгөн изилдөөлөрдүн негизинде изделүүчү графикти толук түзүүгө болбойт, бирок анын жеке аймактарда жүрүштөрү аныкталды. 53-сүрөттө бул аймактар катуу сызыктар менен жүргүзүлгөн; аларды үзүк сызыктар менен туташтырып, биз жүргүзүлгөн изилдөөлөрдү канааттандырган жана функциянын графигинин жалпы мүнөзүн берген кээ бир жөнөкөй ийрини алабыз.



Сүр. 53

Андан ары изилдөөнүн ролу жөнөкөй графиктин чиймесин бөлүп өзгөртүш жана такташ максатында болот.

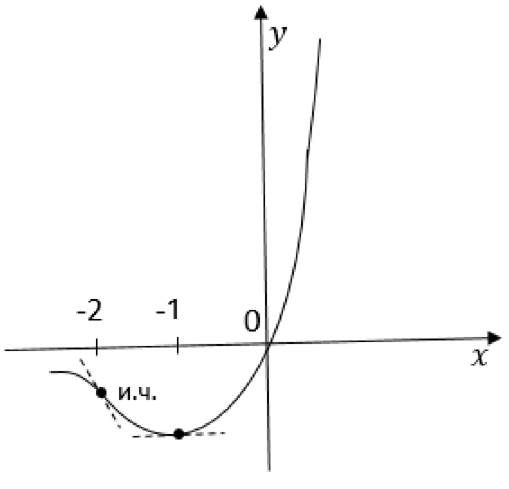
2. Берилген функциянын туундусун табабыз:

$$f'(x) = 3(xe^x)' = 3e^x(\mathrm{x} + 1).$$

$x = -1$ болгондо туунду нөлгө барабар, ошондуктан бул сыналуу чекит. § 4 тө көрсөтүлгөндөй кадимки изилдөөнү жүргүзүп, $x = -1$ болгондо функция минимумга ээ болоорун табабыз:

$$m = f(-1) = -3e^{-1} \approx -1.$$

Бул изилдөөнүн жыйынтыгы боюнча 54- сүрөттө такталган график көрсөтүлгөн. Ал биринчи чиймеден өтө көп айырмаланбайт (карагыла сүр. 53), анда болгону минимум чекитинин жайгашышы гана такталган. Бирок, биринчи туунду боюнча изилдөөнүн баалулугу функция жалгыз экстремумга ээ – минимум, $(-\infty, -1)$ интервалында кемийт жана $(-1, \infty)$ өсө тургандыгы далилденгени болуп саналат.



Сүр. 54

3. $f''(x)$ ти табабыз:

$$f''(x) = 3[e^x(x+1)]' = 3e^x(x+2).$$

$x = -2$ чекити II түрдөгү сыналуу чекити деп аталат, анда $f''(-2) = 0$. § 3төгү ыкмаларды колдонуп, ал ийилүү чекити болоорун табабыз.

Жыйынтыгында, чекиттин жайланышы жана ийилүү чекити такталган, график башка ийилүү чекиттернине ээ эмес, б.а. $(-\infty, -2)$ интервалында график томпок, ал эми $(-2, \infty)$ - иймек болот жана бул башка эч жерде өзгөрбөйт.

582. $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. 1) Функция $x = 2$ чекитинен башка бардык жерде жашайт, б.а. $(-\infty, 2), (2, \infty)$ интервалдарында. Жашоонун чектеринде пределдик маанилерди табабыз:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to2-}(x^2-x-6)\lim_{\substack{x\to2-\\x-2<0}}\frac{1}{x-2}=-4\lim_{\substack{x\to2-\\x-2<0}}\frac{1}{x-2}=+\infty, \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{x^2-x-6}{x-2}=-4\lim_{\substack{x\to2-\\(x-2)>0}}\frac{1}{x-2}=-\infty, \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=+\infty.$$

(4) жана (5) шарттарынан көрүнүп тургандай, $x=2$ түз сызыгы вертикалдык асимптота болот. k жана b табабыз:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6}{x(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x-6}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6-x^2+2x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-6}{x-2}=1.$$

Ошентип, $x\to+\infty$ жана $x\to-\infty$ болгондо функциянын графиги $y=x+1$ түз сызыгына асимптотикалык жакындайт.

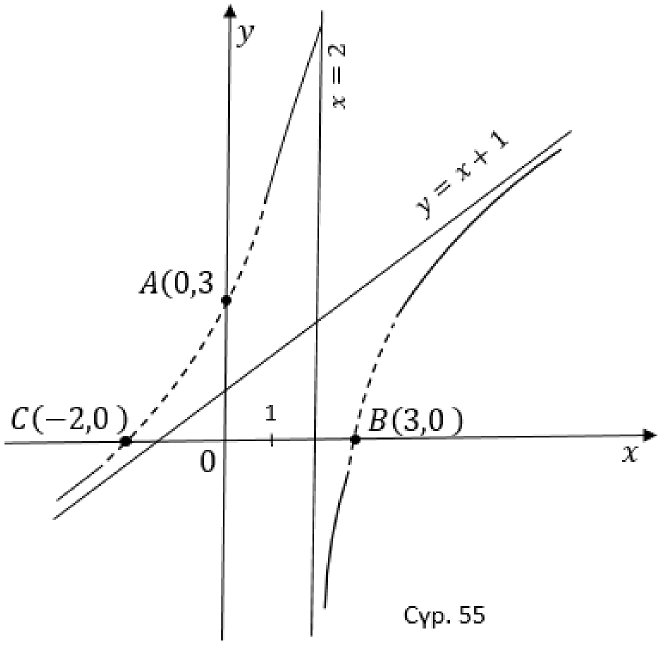
Координата октору менен кесилишүүчү чекиттерди табабыз. $x=0$

y= 3 болгондо. График $A(0,3)$ чекити аркылуу өтөт. $y=0$ койобуз, анда

$\frac{x^2-x-6}{x-2}=0,\ x^2-x-6=0,\ x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6},$ мындан $x_1=3, x_2=-2$. Функциянын графиги $B(3,0)$ жана $C(-2,0)$ чекиттери аркылуу өтөт.

55 – сүрөттө изилдөөнүн бардык жыйынтыктарын канааттандырган жөнөкөй ийри түзүлгөн. Катуу сызыктар менен **581** мисалдагыдай, 1 изилдөөнүн жыйынтыгында алынган

графиктин аймактары жүргүзүлгөн. Үзүк сызык менен графиктин жүрүшүнүн жөнөкөй мүмкүнчүлүгү көрсөтүлгөн.



Сүр. 55

2) $y'(x) = \left(\frac{x^2-x-6}{x-2}\right)' = \frac{(2x-1)(x-2)-x^2+x+6}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$.

Алымдын тамырларын табабыз: $x^2 - 4x + 8 = 0$, $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$; комплекстүү түйүндөш тамырлар, демек алымы x тин эч бир чыныгы маанилеринде нөлгө айланбайт. Бөлүмү $x = 2$ болгондо нөлгө барабар, бирок бул чекитте функция аныкталган эмес. Мындан функция экстремумга ээ эмес экендиги келип чыгат. Бул изилдөө графиктин биринчи чиймесин өзгөрткөн жок, бирок анын тууралыгын далилдеди.

Бул функция ийилүүлөргө да ээ болбой тургандыгын дагы көрсөтөбүз, б.а.өсүү жана кемүү жылмакай, ийилүүсү жок болуп өтөт.

3) $y''(x) = \frac{(2x-4)-(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x+8)}{(x-2)^4} = -\frac{8}{(x-2)^3}$.

II түрдөгү сыналуу чекиттери жок; $x < 2$ болгондо $y''(x) > 0$, ийри $(-\infty, 2)$ интервалында иймек төмөн карай ийилген; $x > 2$ болгондо $y''(x) < 0$, $(2, \infty)$ интервалында ийри жогору карай ийилген.

583. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. 1) Функция $(-\infty, \infty)$ интервалынын бардык жеринде жашайт. Функция жуп болот, анткени ал үчүн $f(-x) = f(x)$ шарты орун алат:

$$(-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3.$$

График ордината огуна салыштырмалуу симметриялуу, ошондуктан бир гана $x \geq 0$ үчүн функцияны изилдөө жетиштүү. $x \to +\infty$ умтулганда маанини эсептейбиз:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 2x^2 + 3) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right) = +\infty.$$

k ны эсептейбиз:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)}{x} = +\infty.$$

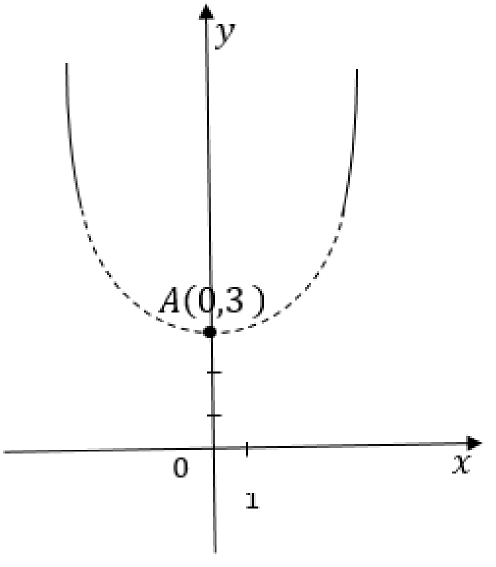
Демек, ийри жантайган асимптотага ээ эмес.

Координата октору менен кесилишүү чекиттерин табабыз. $x = 0$ y$=3$ болгондо. График $A(0,3)$ чекити аркылуу өтөт. $y = 0$ койобуз, анда

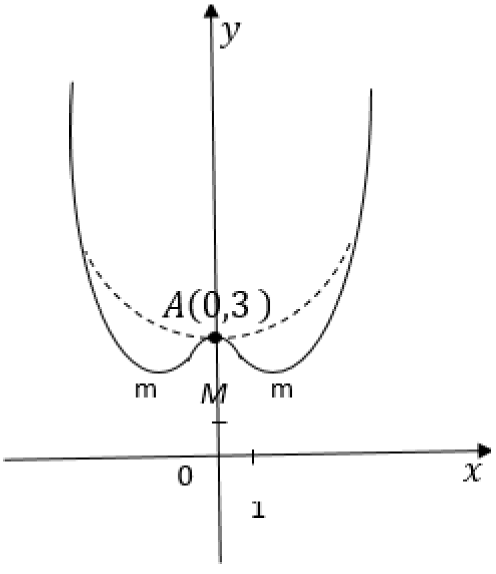
$$x^4 - 2x^2 + 3 = 0, x^2 = u,\ u^2 - 2u + 3 = 0;\ u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-3} = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

График *Ox* огун кесип өтпөйт.

56 – сүрөттө жүргүзүлгөн изилдөөлөрдүн бардык шарттарын канааттандырган жөнөкөй ийри сүрөттөлгөн.



Сүр. 56



Сүр. 57

1)$y'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1$ чекиттери сыналуу чекиттери болот;

$$y''(x) = 4(3x^2 - 1), \tag{6}$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$ маанилерин $y''(x)$ ке коюп, төмөнкүнү алабыз

$$y''(0) = -4 < 0, y''(1) = 8 > 0.$$

$x_1 = 0$ чекитинде функция максимумга жетишет, $x_{2,3}$ чекиттеринде – минимум. Функциянын экстремалдык маанилерин эсссептейбиз $M = y(0) = 3$,

$m = y(\pm 1) = 2$. 56 – сүрөттө ийри 2 изилдөөнүн шарттарын канааттандырбаганы айкын, ал бир экстремумга ээ – минимум, функциянын графиги эки минимумга жана бир максимумга ээ. 57 – сүрөттө графиктин такталган варианты берилген.

2) (6) туюнтмасынын оң жагын нөлгө барабарлап, II түрдөгү сыналуу чекиттерин табабыз:

$$4(3x^2 - 1) = 0,\ x_{4,5} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ чекити аркылуу өтүүдө экинчи туунду белгисин өзгөртөөрү айкын, $x_{4,5} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ чекиттери ийилүү чекиттери болот.

57 – сүрөттөгү ийри бул талаптарды канааттандырат.

584. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. 1) Функция $(-\infty, \infty)$ интервалынын бардык жеринде жашайт.

Жашоо областынын чектеринде пределдик чектерди аныктайбыз:

$$\lim_{x\to-\infty} 3\sqrt[3]{x^2} - 2x = \lim_{x\to-\infty} - 2x\left(1 - \frac{3}{2\sqrt[3]{x}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3\sqrt[3]{x^2} - 2x = \lim_{x\to+\infty} - 2x\left(1 - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = -\infty.$$

k жана b аныктайбыз:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2} - 2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} - 2 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = -2,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} 3\sqrt[3]{x^2} - 2x - (-2)\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

Демек, $x \to \pm\infty$ умтулганда график асимптотага ээ эмес. Координата октору менен кесилишкен чекиттерди табабыз. $x = Oy = 0$ болгондо, б.а. функциянын графиги координата башталышы аркылуу өтөт. $y = 0$ койобуз, анда $3\sqrt[3]{x^2} - 2x = 0$, $x^{2/3}\left(3 - 2x^{1/3}\right) = 0$, мындан $x_1 = 0$ жана $x_2 = \frac{27}{8}$. Функциянын графиги абсцисса огун $O(0,0\ )$ жана $A\left(\frac{27}{8}, 0\right)$ чекиттеринде кесип өтөт.

58 – сүрөттө бул изилдөөнүн бардык шарттарын канааттандырган жөнөкөй ийри көрсөтүлгөн.

2) $y'(x) = 2x^{-1/3} - 2 = 2\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$; $x = 1$ болгондо $y'(x) = 0$ жана $x = 0$ болгондо $y'(x) = \infty$. $x_1 = 0$ жана $x_2 = 1$ чекиттери сыналуу чекиттери болот. Туундунун белгилеринин өзгөрүшүнүн таблицасын түзөбүз:

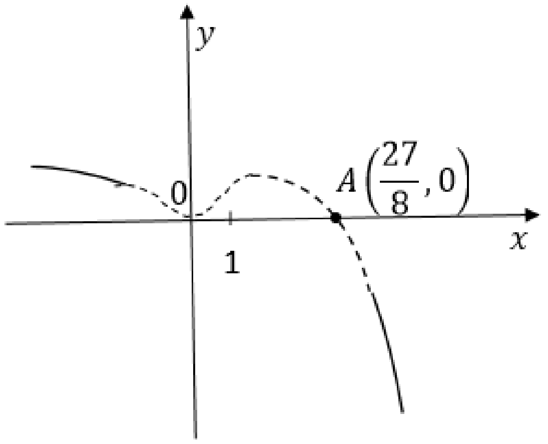
Таблица 8

x	$-\infty < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
$y'(x)$	_	∞	+	0	_
$y(x)$	↘	*m=1*	↗	*M =1*	↘

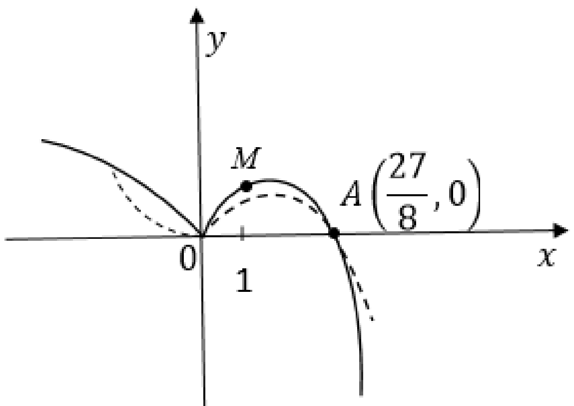
$x = -1$ болгондо $y' = -4 < 0$. Ошентип, $x_1 = 0$ болгондо функция минимумга ээ (*m=0*) жана $x_2 = 1$ – максимум (*M =1*). $x = 0$ болгондо $y'(0) = \infty$, анда минимум курчутуу чекитинин мүнөзүнө ээ.

58 – сүрөттө график минимум чекитинин мүнөзүн тактоону жана максимум чекитинин абалын тактоону талап кылат. 59 – сүрөттө 1 жана 2 изилдөөлөрүн жалпысынан канааттандырган график түзүлгөн.

3) $y''(x) = 2\left(x^{-\frac{1}{3}} - 1\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$; $y''(0) < 0$, $x \neq 0$ x тин бардык маанилери үчүн. График ийилүү чекитине ээ эмес жана бардык жерде төмөн ийилип умтулган ( ).



Сүр. 58



Сүр. 59

59 – сүрөттө көрсөтүлгөн график кошумча тактоолорду талап кылбай тургандыгы анык.

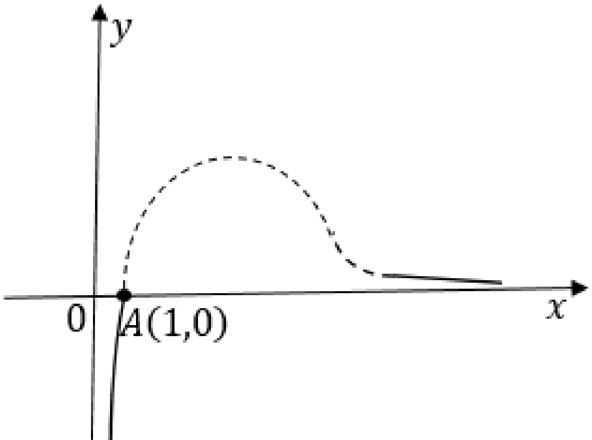
585. $y = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$ функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. 1) Функция $(0, \infty)$ интервалында жашайт, анткени бул интервалда $\ln x$ жана $\sqrt{x}$ функциялары жашайт жана андан сырткары бөлчөктүн бөлүмү бул интервалда нөлгө айланбайт. Жашоо областынын чектеринде пределдик маанилерди эсептейбиз:

$$\lim_{x\to 0+} 3\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty, \qquad (7)$$

анткени $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} 3\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 3\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)'}{(\sqrt{x})'} = 3\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 3\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0. \qquad (8)$$



Сүр. 60

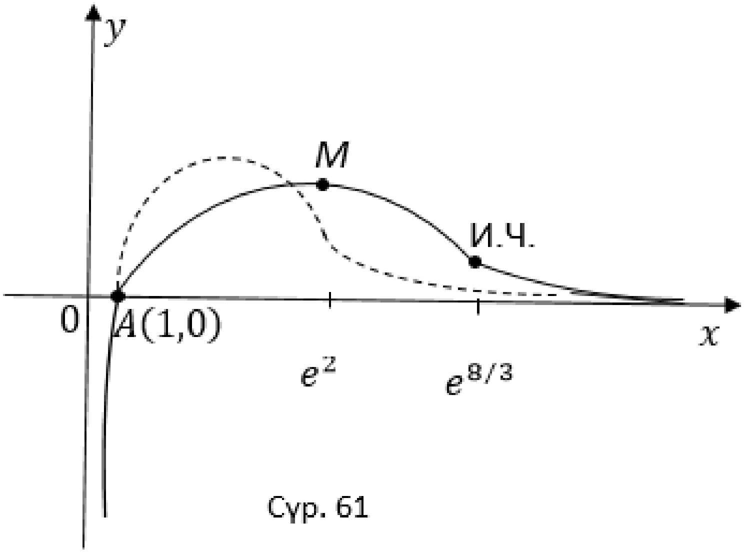
(7) шартынан $x = 0$ түз сызыгы вертикалдык апсимптота болот, ал эми (8) шартынан $x \to +\infty$ умтулганда $y = 0$ түз сызыгы горизонталдык апсимптота болоору келип чыгат. Ордината огу менен график кесилишпейт, анткени $x \leq 0$ болгондо функция аныкталган эмес. $x = 1$ болгондо $y = 0$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$. Функциянын графиги абсцисса огу менен $A(1,0)$ чекитинде кесилишет. 60-сүрөттө бул изилдөөнүн бардык шарттарын канааттандырган жөнөкөй ийринин графиги сүрөттөлгөн.

2) $y'(x) = \left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = 3 \cdot \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = 3 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}$; $1 - \frac{1}{2}\ln x = 0$ болгондо

$y'(x) = 0$, же $x_1 = e^2$; $x_1 = e^2$ сыналуу чекити болот. $y'(x)$ туюнтмасынан $x < e^2$ болгондо $y'(x) > 0$ жана $x > e^2$ болгондо $y'(x) < 0$ болоору көрүнүп турат, демек $x_1 = e^2$ сыналуу чекитинде функция максимумга жетишет. Графикти тактоо бул учурда максимум чекиттин абалын тактоого келтирилет (сүр. 61).

3) $y''(x) = 3\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)' = 3 \cdot \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)}{x^3} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8 - 3\ln x}{x^{\frac{5}{2}}}$;

$8 - 3\ln x = 0$ же $x = e^{\frac{8}{3}}$ болгондо $y''(x) = 0$. $y''(x)$ туюнтмасынан $x < e^{8/3}$ болгондо $y'' < 0$ – ийриси төмөнгө ийилген, ал эми $x > e^{8/3}$ болгондо $y'' > 0$- ийриси жогору карай иймек. $x_2 = e^{8/3}$ чекитинде ийилүү болот. 60- сүрөттөгү ийри дагы ийилүүгө ээ экендиги айкын; 3 изилдөө ийилүү чекитинин абалын гана тактайт. 61- сүрөттө бардык жыйынтыкталган шарттарды канааттандырган график түзүлгөн.



Сүр. 61

586. $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$ (9) функциясынын графигин түзгүлө.

Чыгаруу. 1) Функция $(-\infty, \infty)$ интервалынын бардык жеринде жашайт, $T = 2\pi$ мезгилине ээ. Чындыгында,

$$\frac{1}{2}\sin 2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x\,.$$

Мезгилдүүлүктүн күчүндө берилген функциянын графигин каалагандай узундуктагы кесиндиде $T = 2\pi$ түзүү жетиштүү, мисалы $[-\pi, \pi]$ кесиндиде. (9) функциясынын интервалдардын учтарында маанилерин эсептейбиз:

$$y|_{x=\pi} = y|_{x=-\pi} = \frac{11}{2}\sin 2\pi + \cos\pi = -1.$$

Функциянын графиги $A(-\pi, -1), B(\pi, -1)$ чекиттери аркылуу өтөт. Графиктин координата октору менен кесилишүү чекиттерин табабыз. $x = 0$ болгондо $y = 1.$ Функциянын графиги $C(0, 1)$ чекити аркылуу өтөт. $y = 0$ деп койобуз, анда

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = 0. \qquad (10)$$

Бул теңдеменин сол жагын өзгөртүп түзөбүз:

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x + \cos x = \cos x(1 + \sin x).$$

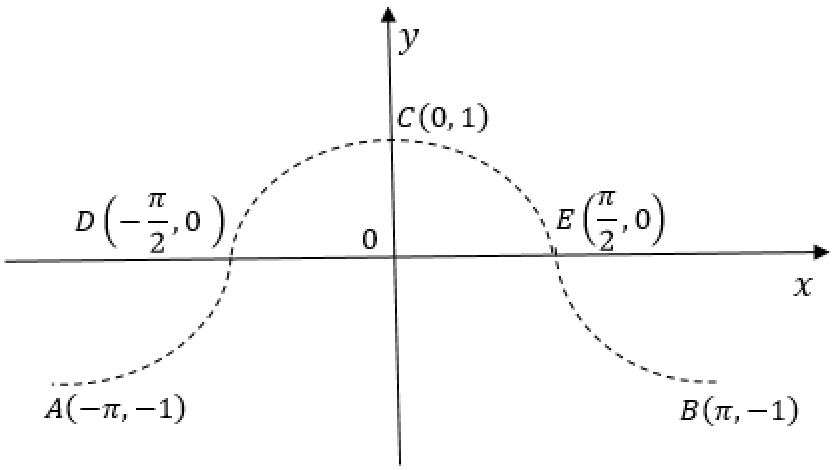
(10) теңдемеси шарттарга эквиваленттүү болгон $\cos x(1 + \sin x) = 0$ түрүндө жазылат

$$\cos x = 0 \qquad (11)$$

$$(1+\sin x)=0. \quad (12)$$

(11) теңдемесинин тамырлары $x_k=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ $(k=0,\pm1,\pm2\,...)$. Бул тамырлардан $[-\pi,\pi]$ кесиндисинин ичинде $x_1=-\frac{\pi}{2}$ $(k=1$ болгондо)
$x_0=\frac{\pi}{2}$ $(k=0)$ чекиттери туура келишет. $\sin x=-1$ ошол чекиттерде болот, мында $\cos x=0$, анда (12) теңдеменин тамырлары (11) теңдемесинин тамырларынын арасында жайгашышат. Ошентип, (9) функциясынын графиги Ox огун $D\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ жана $E\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ чекиттеринде кесип өтөт.

Мурдагы мисалдардагыдай эле, графиктин A, B, C, D, E чекиттерин түзөбүз жана бул чекиттер аркылуу өтүүчү жөнөкөй ийрини жүргүзөбүз (сүр. 62). Бул мисалдын мурдагылардан айырмачылыгы мезгилдүүлүгү болгон



Сүр. 62

функция чексиздикте изилденбейт жана ийрини мезгилдин кесиндисинде түзүү жетиштүү.

2) $y'=\cos 2x-\sin x$. $\cos 2x-\sin x=0$ теңдемесинен же $\cos 2x=cos^2x-sin^2x=1-2sin^2x$, $\quad -1-2sin^2x-\sin x=0$ формуласын колдонуп сыналуу чекиттерин аныктайбыз. $\sin x=t$ деп белгилейбиз жана $2t^2+t-1=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз:

$$t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=0, t_{1,2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4};\ t_1=-1, t_2=\frac{1}{2};$$

төмөнкүгө ээ болобуз

$$\sin x=-1 \text{ жана } \sin x=\frac{1}{2}. \tag{13}$$

Берилген учурда бизди $[-\pi,\pi]$ кесиндисине түшкон гана (13) теңдемесинин тамырлары кызыктырат б.а. $x_1=-\frac{\pi}{2}, x_2=\frac{\pi}{6,}, x_3=\frac{5\pi}{6}$ чекиттери. Бул сыналуу чекиттердин мүнөзүн аныктоо үчүн $y''(x)$ти табабыз:

$$y''(x)=(\cos 2x-\sin x)'=-2\sin 2x-\cos x; \tag{14}$$

$$y''|_{x=-\frac{\pi}{2}}=-2\sin(-\pi)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$y''|_{x=\frac{\pi}{6}}=-2\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}<0,$$

$$y''|_{x=\frac{5\pi}{6}}=-2\sin\frac{10\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}>0.$$

$x_2=\frac{\pi}{6}$ чекитинде функция максимумга жетишет, $x_3=\frac{5\pi}{6}$ чекитинде – минимумга. Экстремум чекиттеринде функциянын маанилерин табабыз:

$$y|_{x=\frac{\pi}{6}}=M=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1{,}3,$$

$$y|_{x=\frac{5\pi}{6}}=m=\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx -1{,}3.$$

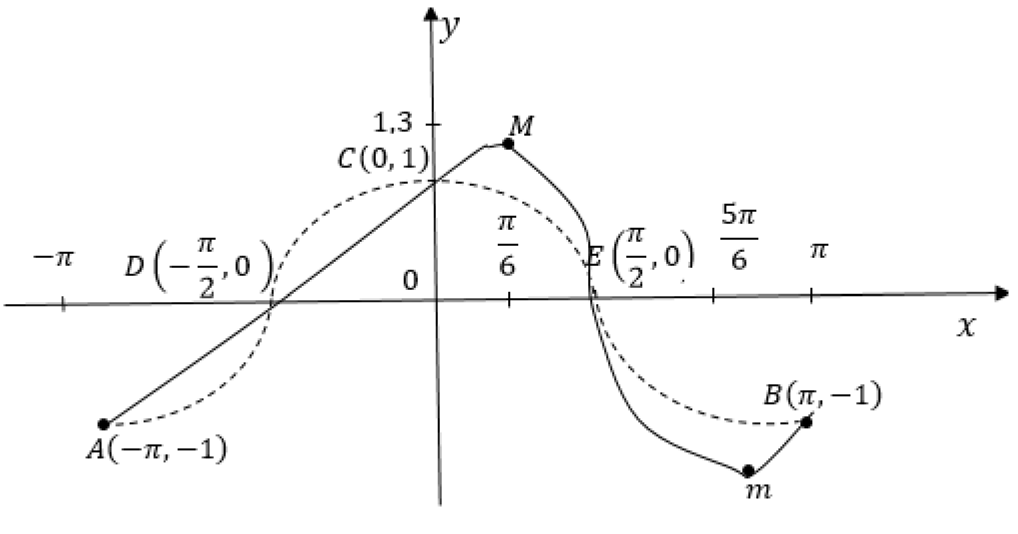
$x_1=-\frac{\pi}{2}$ сыналуу чекитинин мүнөзүн аныктоо үчүн $y'''(x)$ти табабыз [(14) кара]:

$$y'''(x)=-4\cos 2x+\sin x;$$

$x_1=-\frac{\pi}{2}$ маанисин койобуз:

$$y'''|_{x=-\frac{\pi}{2}}=-4\cos(-\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\neq 0.$$

$x_1 = -\frac{\pi}{2}$ чекитинде үчүнчү тартиптеги (так) туундусу нөлдөн айырмалуу болгон биринчи туунду, ошондуктан бул сыналуу чекитинде экстремуму жок. 63- сүрөттө изилдөөнүн 1) жана 2) жыйынтыктарына дал келген функциянын графиги берилген.



Сүр. 63

3) (14) туюнтмасынын оң жагын нөлгө барабарлап, II түрдөгү сыналуу чекиттерин табабыз:

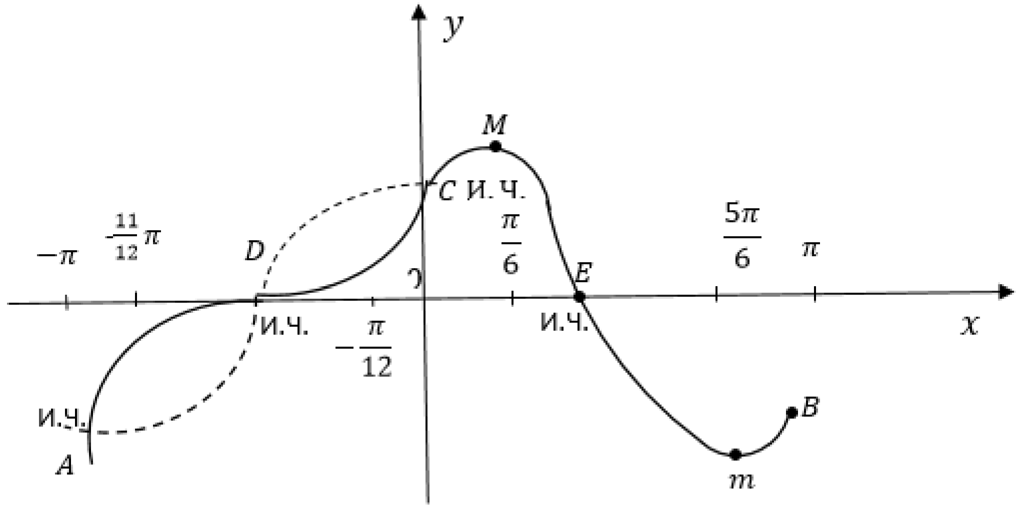
$$-2\sin 2x - \cos x = 0,$$

$\sin 2x = 2\sin x\ \cos x$ ке алмаштырып, төмөнкүнү алабыз

$$-4\sin x\ \cos x - \cos x = 0, \text{ же } \cos x\,(1 + 4\sin x) = 0. \quad (15)$$

(15) теңдемеси $\cos x = 0$ жана $1 + 4\sin x = 0$ теңдемелерине ажырайт. Бизди кайра эле бул теңдемелердин $[-\pi, \pi]$ кесиндисининин ичине түшкон гана тамырлары кызыктырат б.а. $x_4 = -\frac{\pi}{2}, x_5 = \frac{\pi}{2}, x_6 = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) \approx -\frac{\pi}{12}, x_7 \approx -\frac{11\pi}{12}$ чекиттери, бул чекиттердин ар бири ийилүү чекити болот, анткени $y''(x) = -\cos x\,(1 + 4\sin x)$ туюнтмасы алардын ар бири аркылуу өткөндө белгисин өзгөртөт.64-сүрөттө 3 изилдөө кошулуп толуктоолорду эске алуу менен график түзүлгөн. Бул сүрөттө үзүлгөн сызык менен 63-сүрөттөгү график көрсөтүлгөн.Мындай салыштыруудан көрүнүп тургандай 3 изилдөөсү берилген учурда болгону анык болгон жашашы мурда эле жетиштүү ийилүү чекиттеринин абалын гана

тактабастан (эки жолу дифференцирленүүчү функция үчүн каалаган максимум жана минимум чекиттеринин арасында ийилүү чекити бар болушу керек), бирок ийилүү чекиттерин $\left(-\pi, \frac{\pi}{6}\right)$ интервалында функциянын өсүү мүнөзүн өзгөрткөн кошумча ийилүү чекиттерин ачыктады.



Сүр. 64

Төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө.

587. $y = x^3 e^x$.

588. $y = \frac{e^x}{x+1}$.

589. $y = 2 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

590. $y = 5 - \frac{2}{x} - x^2$.

591. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

592. $y = \frac{3}{(x+2)} - \frac{3}{(x-2)} - 1$.

593. $y = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$.

594. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$.

595. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

596. $y = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2)$.

597. $y = x + \mathrm{arctg}x$.

598. $y = 2x - \arcsin x$.

599. $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{x^2}{3}}$.

§ 3.5. ТУУНДУНУН ГЕОМЕТРИЯЛЫК КОЛДОНУЛУШУ

1. **Жалпак ийринин ийрилиги.** Ийринин ийрилиги деп, анын түз сызыктан кыйшаюуусун түшүнүшөт. K ийринин ийрилиги берилген M чекитте “чектеш бурчтардын” катышынын предели менен мүнөздөлөт, б.а. M жана N чекиттериндеги жанымалар арасындагы бурчтун (65-сүр. кара) $N \to M$ болгондогу $\overset{\frown}{MN}$ жаасынын узундугуна, б.а.

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}, \qquad (1)$$

$y = f(x)$ теңдемеси менен берилген ийрилер үчүн ийрилик төмөнкү формула менен аныкталат

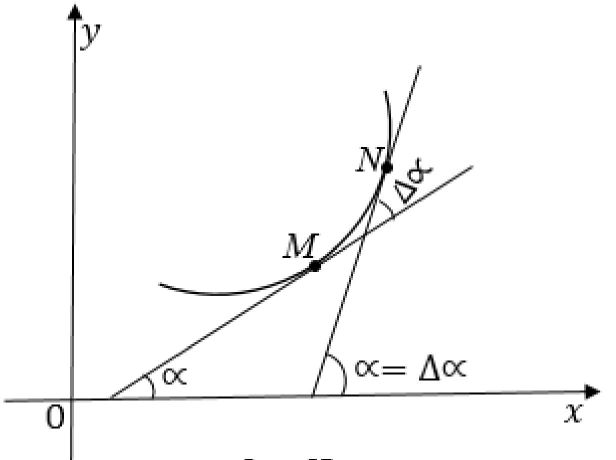
$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)$$

Ийринин $y = \varphi(t), x = \varphi(t)$ параметрдик түрдө берилишинде ийрилик төмөнкү формула менен табылат

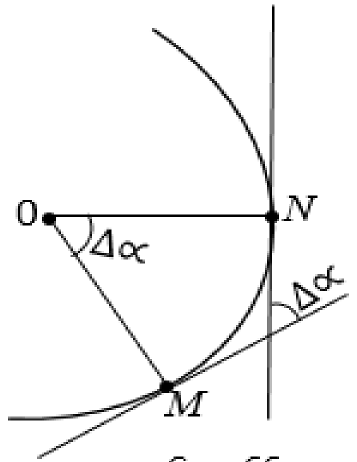
$$K = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Эскертүү. Параметр боюнча туундуларды төмөнкүдөй түрдө белгилөө кабыл алынган:

$\frac{dx}{dt} = x'_t = \dot{x}, \frac{dy}{dt} = y'_t = \dot{y}, \frac{d^2y}{dt^2} = y''_{tt} = \ddot{y}$ ж.б.у.с. Механикада көбүнчө $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$ ж.б.белгилер колдонулат.



Сур. 65



Сур. 66

600. R радиустагы айлананын ийрилигин аныктагыла.

Чыгаруу. (1) формуласын колдонобуз. Бурчтардын чектештиги $\Delta\alpha$ 66 – сүрөттө көрүнүп тургандай борбордук $\angle MON$ бурчуна барабар. Бул борбордук бурчка дал келүүчү $\Delta s = \overset{\smile}{MN}$ жаанын узундугу $\Delta s = R\Delta\alpha$ га барабар. Ошентип,

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{R \cdot \Delta s} = \frac{1}{R}.$$

Демек, айлананын ийрилиги айлананын радиусуна тескери болгон турактуу чоңдук.

601. $A(0,-5)$ чекитинде $y = x^3 + x^2 - 5$ ийрисинин ийрилигин аныктагыла.

Чыгаруу. (2) формуласын колдонобуз. y' жана y'' табабыз:

$$y'(x) = 3x^2 + 2x,\ y''^{(x)} = 6x + 2;\ y'|_{x=0} = 0, y''|_{x=0} = 2;$$

$$K|_{x=0} = \left.\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0} = \frac{2}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} = 2.$$

602. $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t\ (-\pi \le t < \pi, a > b)$ эллипстин ийрилигинин эң чоң жана эң кичине чекиттернин аныктагыла.

Көрсөтмө. $K(t)$ функциясын экстремумга изилдөө.

603. $A(1,0)$ чекитинде $y = \ln\frac{1}{x}$ ийрисинин ийрилигин тапкыла.

604. $y = \sin x$ функциясынын максималдуу ийрилигинин чекиттерин тапкыла.

605. $x = acos^3t, y = asin^3t$ (астроида) ийрисинин ийрилигин тапкыла.

2. Ийриликтин радиусу. 640 – мисалда айлананын радиусу анын ийрилигине тескери чоңдук экендиги көрсөтүлгөн. Айлана менен окшоштук боюнча каалагандай ийри үчүн ийриликтин абсолюттук маанисине тескери, ийриликтин радиусу жөнүндөгү түшүнүк ρ чоңдугу киргизилет

$$\rho = \frac{1}{|K|}. \qquad (4)$$

606. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ийрисинин ийрилигинин радиусунун туюнтмасын тапкыла.

Чыгаруу. (2) жана (4) формулаларын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$\rho = \frac{1}{|y''|}|1 + y'^2|^{\frac{3}{2}}.$$

y' жана y'' аныктайбыз:

$$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ y'' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

анда

$$\rho = \left|\frac{\left[1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}\right| = \left|\frac{(4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x})^{\frac{3}{2}}}{4(e^x + e^{-x})}\right|$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^3}{4(e^x + e^{-x})} = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2.$$

Чоңдук каалагандай x үчүн оң болот, модул белгисин таштап жиберебиз.

607. $x = 1$ болгондо $y = \frac{2}{x} - 1$ ийрисинин ийрилигинин радиусун тапкыла.

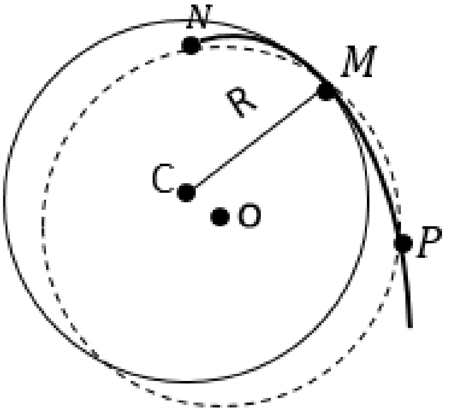
608. $x = 4$ болгондо $y^2 = x$ параболасынын ийрилигинин радиусун тапкыла.

609. Төмөнкү ийрилердин ийрилик радиусунун туюнтмасын тапкыла:

а) $y = x^3$, б) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ (айлананын эволентасы), в) $x = (t - \sin t), y = (1 - \cos t)$ (циклоида).

3. **Ийриликтин борбору жана айланасы. Эволюта жана эвольвента.**

$N \to M$ жана $P \to M$ болгондо, M жана ийринин эки жакын чекиттери N жана P аркылуу өтүүчү M чекитиндеги ийриликтин айланасы айлананын чектик абалы деп аталат (67-сүр). Ийриликтин айланасынын радиусу тиешелүү чекиттеги ийриликтин радиусуна барабар. C ийриликтин айланасынын борбору ийриликтин M чекитиндеги борбору деп аталат. Ийриликтин борбору анын ийметигинин багытындагы нормалда жатат.



Сүр.67

$y = f(x)$ теңдемеси менен берилген ийринин ийрилигинин борборунун координаталары төмөнкү формулалар менен аныкталат

$$x_C = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''};\ y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \qquad (5)$$

жана параметрдик түрдө берилген ийри үчүн: $y = \varphi(t), x = \psi(t)$, төмөнкү формулалар менен

$$x_C = x - \frac{\dot{y}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}\ , y_C = y + \frac{\dot{x}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}\,. \qquad (6)$$

Ийринин ийрилигинин геометриялык орду анын эволютасы деп аталат.Берилген ийри эволюта болгон ийри эвольвента деп аталат.

610. $x = t^2, y = 2t^3$ ийрилердин $A(1,-2)$ чекитинде ийрилик радиусунун тапкыла.

Чыгаруу. (6) формулаларын пайдаланабыз. $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$ табабыз.

$$\dot{x} = 2t, \ddot{x}, = 2, \dot{y} = 6t^2\ , \ddot{y} = 12t.$$

$x = 1, y = -2$ чекитинде бул туундулардын маанилери керек б.а. $t = -1$ болгондо:

$$\dot{x}|_{t=-1} = -2, \ddot{x}|_{t=-1} = 2, \dot{y}|_{t=-1} = 6, \ddot{y}|_{t=-1} = -12,$$

Табылган сандарды (6) формулага коюп төмөнкүлөрдү алабыз

$$x_C = 1 - \frac{6[(-2)^2+2^2]}{(-2)(-12)-2\cdot 6} = 1 - \frac{48}{12} = -3, y_C = -2 + \frac{-2\cdot 8}{12} = -\frac{10}{3}.$$

611. $x = a\cos t, y = b\sin t$ эллипстин эволютасынын теңдемесин тапкыла.

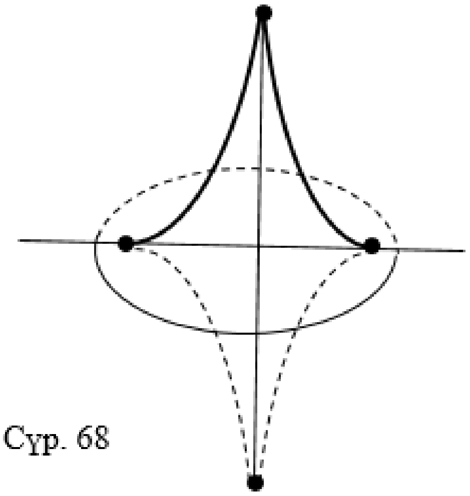
Чыгаруу. Эллипстин эркин чекити үчүн ийриликтин борборунун координаталарын табабыз. Алдын ала $\dot{x} = -a\sin t$, $\ddot{x} = -a\cos t, \dot{y} = b\cos t$,
$\ddot{y} = -b\sin t$ туундулардын маанилерин эсептеп, (6) формулаларын колдонобуз:

$$x_C = x - \frac{b\cos t(a^2sin^2t + b^2cos^2t)}{absin^2t + abcos^2t}$$
$$= x - \frac{\cos t(a^2sin^2t + b^2cos^2t)}{a},$$
$$y_C = x - \frac{\sin t}{b}(a^2sin^2t + b^2cos^2t).$$

$x = a\cos t, y = b\sin t$ ны коюп, эволютанын параметрдик теңдемесин алабыз:

$$x_C = a\cos t - a\cos t(1 - cos^2t) - \frac{b^2}{a}cos^3t \text{ же } x_C = \frac{a^2-b^2}{a}cos^3t.$$
$$y_C = b\sin t - b\sin t(1 - sin^2t) - \frac{a^2}{b}sin^3t \text{ же } y_C = -\frac{a^2-b^2}{b}sin^3t.$$

Эллипстин жана анын эволютасынын өз ара жайланышы 68-сүрөттө көрсөтүлгөн.



Сүр. 68

612. а) астроиданын ийрилигинин борборунун координаталарын тапкыла: $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ чекитинде $x = \sqrt{2}cos^3t\,, y = \sqrt{2}sin^3t.$

б) $y = x^2$ параболанын эволютасынын теңдемесин тапкыла.

БАП 4. ТУУНДУНУН ЭКОНОМИКАДАГЫ КОЛДОНУЛУШУ

§ 4.1. ЭКОНОМИКАДАГЫ СУММАРДЫК (ЖАЛПЫ) ОРТО ЖАНА ПРЕДЕЛДИК ЧОҢДУКТАРДЫН АНЫКТАМАЛАРЫ

$F(x)$ суммардык (жалпы) чоңдугу деп каалагандай $F(x)$ көз карандысыз өзгөрүлмөлүү функцияны түшүнүшөт. Эреже катары, экономикада суммардык деп абсолюттук чоңдуктар түшүндүрүлөт: киреше (пайда) $R = R(q)$ же чыгаша $C = C(q)$ чыгаруу көлөмүнүн функциясы катары, чыгаруу көлөмү өзгөрүлмө ресурстун санынын функциясы катары, мисалы эмгектин $Q_L = Q(L)$, пайдалуулук $U = U(x)$ керектелүүчүнүн жыргалчылыгынын саны жана башка экономикалык көрсөткүчтөрдүн функциясы катары.

$AF(x)$ орточо чоңдук суммардык чоңдуктун көз каранды эмес өзгөрүлмөгө катышы катары аныкталат: $AF(x) = \frac{F(x)}{x}$. Тамга A – Average (орточо) сөзүнөн кыскартуу. Орточо чоңдук $\bar{F} = AF(x)$ менен белгилениши да мүмкүн.Экономикадагы орточо чоңдуктардын мисалдары: орточо киреше $AR = \frac{R(q)}{q}$, эмгектин орточо продуктусу $AQ_L = \frac{Q(L)}{L}$ ж.б.у.с.

$MF(x)$маржиналдык (пределдик) чоңдук $F(x)$ суммардык чоңдуктун x көз каранды эмес өзгөрүлмө боюнча туундусу катары аныкталат: көз каранды эмес өзгөрүлмө үзгүлтүксүз өзгөргөн учурда $MF(x) = F'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ болот. Эгерде суммардык чоңдук дискреттик өзгөрсө, анда маржиналдык (пределдик) чоңдук катары $F(x)$ суммардык чоңдуктун $\Delta F(x)$өзгөрүүсүнүн x көз каранды эмес өзгөрүлмөнүн Δx өзгөрүүсүнө (өсүндүсүнө) катышы катары түшүнүшөт: $MF(x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$. Экономикадагы пределдик чоңдуктардын мисалдары: пределдик киреше $MR = R'(q)$ же $\frac{\Delta R}{\Delta q}$,

эмгектин пределдик продуктусу $MQ_L = Q'(L)$ же $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$, пределдик пайдалуулук $MU_x = U'(x)$ же $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ ж.б.у.с.

§ 4.2. ЭКОНОМИКАНЫН ОБЛАСТЫНАН ФУНКЦИЯЛАРДЫ КОЛДОНУУНУН МИСАЛДАРЫ

1. Пайдалуулук функциясы (артыкчылык функция)

Керектөөчүлөрдүн каалоолорун талдоо үчүн пайдалуулук түшүнүгү колдонулат. Кандайдыр бир товардын пайдалуулугу анын адамдын же коомдун кандайдыр бир керектөөлөрүн канааттандыруу жөндөмдүүлүгү.

Жалпы пайдалуулук TU (*total utility*) берилген убакыттын ичинде белгилүү бир сандагы товарларды же кызматтарды керектөөнүн натыйжасында адам алган жалпы канааттануу.

Пайдалуулук функциясы (артыкчылык функция) белгилүү бир мезгил ичинде товардын ар биринин керектөө көлөмүнө товардын жалпы пайдалуулугунун сандык көз карандылыгын көрсөтөт.

Математикалык жактан *пайдалуулук функциясы* товарлардын n-санынын белгилүү бир мезгил ичинде керектелишинен көз каранды функция катары көрсөтүлөт:

$$TU = U(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

мында q_i- керектөө жыйындысына киргизилген i-товар.

Пределдик пайдалуулук (*marginal utility*)- убакыт бирдигине берилген товардын бир кошумча бирдигин керектөөдөн адам алган кошумча пайдалуулук.

Математикалык жактан пределдик пайдалуулук берилген товардын санына карата жалпы пайдалуу функциянын биринчи туундусу болот:

$$MU = (TU)'(q) = \frac{d(TU)}{dq},$$

мында $d(TU)$- жалпы пайдалуулуктун өсүндүсү, dq - керектелген товардын саны. Жалпы пайдалуулуктун функциясынын жөнөкөй жана көп колдонулган мисалдарынын бири кубдук функция болот:

$$TU = a + bq + cq^2 - dq^3,$$

мында q- керектелген товардын саны, a, b, c, d – оң туруктуулар.

Белгилүү бир убакыттан баштап, бир кошумча товарды керектөөнүн кошумча пайдасы бул товарды керектөөнүн көлөмү көбөйгөн сайын азаят. Бул мыйзам ченемдүүлүк универсалдуу мүнөзгө ээ жана пределдик пайдалуулуктун кемүү мыйзамы деп аталат. Математикалык жактан бул, берилген товардын санына карата жалпы пайдалуулуктун экинчи туундусу терс чоңдук болуп саналат дегенди түшүндүрөт.

Маселе 1. Каныккан чекитти аныктоо

Жеке керектөөчүнүн пайдалуулук функциясы берилсин:

$$TU = 120q - 2{,}5q^2.$$

Жалпы пайдалуулук TU максималдуу болуп жана адам керектөөсүн канааттандырганга жеткен чекитти аныктагыла.

Чыгаруу. $MU = (TU)'(q) = 0$ болгон учурда жалпы пайдалуулуктун функциясы өзүнүн максимумуна жетет:

$$MU = \frac{d(TU)}{dq} = (120q - 2{,}5q^2)' = 120 - 5q = 0.$$

Ошентип, $q = 24$ чекити изделүүчү канааттандырууга жеткен чекит болот.

Маселе 2. Пределдик пайдалуулуктун кемүү закону

Пайдалуулук функциясы төмөнкү теңдеме менен берилсин:

$$TU = 25q + 5q^2 - \frac{1}{3}q^3.$$

Пределдик пайдалуулуктун кемүү закону иштей баштаганда, башкача айтканда пределдик пайдалуулук азая баштаган учурда керектөө көлөмүн тапкыла.

Чыгаруу. Пределдик пайдалуулуктун функциясын табабыз:

$$MU = \frac{d(TU)}{dq} = \left(25q + 5q^2 - \frac{1}{3}q^3\right)' = 25 + 10q - q^2.$$

MU пайдалуулуктун пределдик функциясы масималдуу мааниге ээ болгон чекитте азая баштагандыгы айкын. $\frac{d(MU)}{dq}$ ны нөлгө барабарлап жана бул теңдемени q карата чыгарып, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{d(MU)}{dq} = \frac{d^2(TU)}{dq^2} = (25 + 10q - q^2)' = 10 - 2q.$$

$$10 - 2q = 0.$$

Мында $q = 5$ пайдалуулук предели азая баштаганда керектөөнүн даражасы.

2. Эмгек өндүрүмдүүлүгү

x сарпталган ресурстун көлөмүнөн (мисалы, эмгектин санынан) көз карандылыгына жараша убакыт бирдигинде өндүрүлгөн продукциянын көлөмүн берүүчү бир факторлуу же бир ресурстук $y = f(x)$ өндүрүштүк функциясын карап көрөлү. Фирманын жумушчуларынын саны L барабар болсун дейли.Өндүрүштүн натыйжалуулугун (эффективдүүлүгүн) баалоо үчүн көпчүлүк учурда орточо эмгек өндүрүмдүүлүгү колдонулат, ал $Af(L) = \frac{f(L)}{L}$ ге барабар.

Эгерде өндүрүштүк функция дифференцирленүүчү деп эсептесек, анда $f(L + 1) \approx f(L) + f'(L)$. Эгерде L саны чоң болсо, анда $f'(L) \approx f(L + 1) - f(L)$. Ошондуктан $f'(L)$ болжол менен убакыт бирдигинде жаңы (дагы бир) кызматкер тарабынан өндүрүлгөн кошумча продукциянын көлөмүнө барабар.

Экономистер өндүрүштүк функциянын L чекитиндеги туундусун пределдик же эмгектин маржиналдык өндүрүмдүүлүгү (L ресурсунун пределдик эффективдүүлүгү) деп аташат.

p – продукциянын бирдигинин баасы, v - убакыт бирдиги үчүн жумушчунун эмгек акысы. Эгерде

$$pf'(L) > v,$$

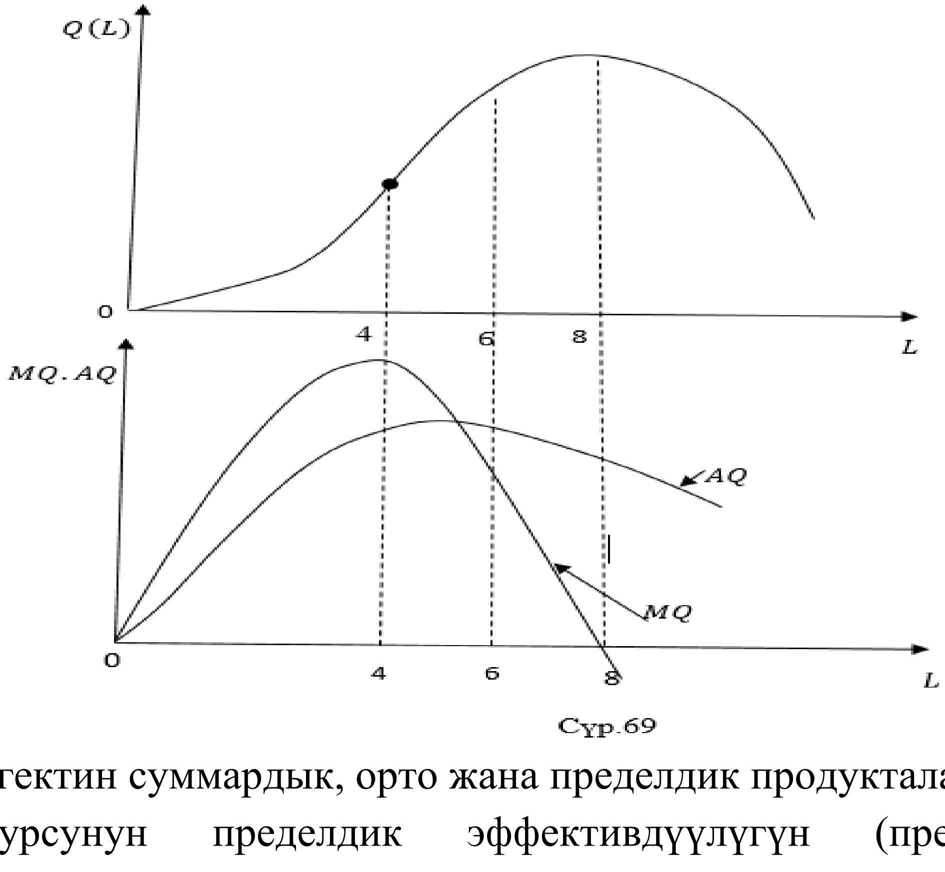
анда фирмага дагы бир кызматкерди жалдоо керек , ал фирмага ага төлөнгөндөн көп пайда алып келет. Бул татаал эмес эреже универсалдуу мүнөзгө ээ жана *экономиканын алтын эрежеси* деп аталат.

Маселе 3. Өндүрүштүн эффективдүүлүгүнүн азайышынын закону

Бул мыйзам өндүрүштүн негизги факторлорунун биринин, мисалы L эмгек чыгымдарынын өсүшү менен, L дин кээ бир маанилеринен баштап өндүрүштүн өсүшү кемүүчү функция болуп саналат деп ырастайт.

Башкача айтканда, L өндүрүшүнүн көлөмү томпоктуктун төмөн жактан өйдө карай томпоктукка алмашуу графиги менен сүрөттөлөт.

613. Функция $Q(L) = -\frac{L^3}{3} + 4L^2$ теңдемеси менен берилсин. Өндүрүш процессин көзөмөлдөйбүз. (сүр.69)



Сүр.69

Эмгектин суммардык, орто жана пределдик продукталары

L ресурсунун пределдик эффективдүүлүгүн (пределдик өндүрүмдүүлүгүн) табабыз:

$$MQ(L) = Q' = \left(-\frac{L^3}{3} + 4L^2\right)' = -L^2 + 8L.$$

Андан ары экинчи туундуну табабыз

$$Q''(L) = \left(-\frac{L^3}{3} + 4L^2\right)'' = (-L^2 + 8L)' = -2L + 8.$$

Нөлгө барабарлап $-2L + 8 = 0$, $L = 4$ алабыз. L 0 дөн 4кө чейин болгондо жумушчулардын продукциясынын жыйындысынын көлөмүнүн тездетилген өсүшү байкалат. $A(L) = \frac{Q(L)}{L}$ эмгектин орточо өндүрүмдүүлүгү жогорулайт, эмгектин пределдик өндүрүмдүүлүгү $MQ(L) = Q'(L)$ дагы көбөйөт жана жумушчунун $L = 4$ болгондо өзүнүн максималдык маанисине жетет. Бул этапты кирешени жогорулатуу этабы деп аташат. Бул учурда $Q''(L) = -2L + 8 > 0$ жана $Q(L) = -\frac{L^3}{3} + 4L^2$ дин графиги төмөн карай томпок.

Кийинки баскыч – жумушчулардын L 4 төн 8ге чейин болгондо кирешесинин төмөндөшүнүн этабы. Өндүрүш көлөмүнүн тынымсыз өсүшү менен пределдик эмгек өндүрүмдүүлүгүнүн нөлгө чейин акырындык менен төмөндөшү байкалат: $L = 8$ болгондо $MQ(L) = 0$. Бул шарттарда өндүрүштүн көлөмү максималдуу мүмкүн болот, жана бир гана кадрлардын санынын көбөйүшүнө байланыштуу аны андан ары көбөйтүү мүмкүн эмес болуп калат.

Акыркы этап – кирешенин терс этабы (L 9 жана андан көп жумушчулардан). Продукцияны чыгаруу көлөмү кыскарат, ал эми пределдик продукт $MQ(L)$ терс болуп калат. Кошумча эмгек ресурстарын пайдалануу экономикалык жактан негизсиз болуп калат.

Маселе 4. Эмгек өндүрүмдүүлүгүн, ылдамдыгын жана анын өзгөрүү темпин эсептөө.

614. Кээ бир ишкана тарабынан бир жумушчу күн ичинде өндүрүлгөн продукциянын Q (миң рубль) көлөмүн $Q = -2t^3 + 30t^2 + 48t + 650$ функциясы менен туюнтса болот, мында $t -$

убакыт. Эмгек өндүрүмдүүлүгүн, ылдамдыгын жана анын өзгөрүү темпин тапкыла:

а) күндүн башталышында ($t=1$); б) күндүн ортосунда $(t=4)$; күндүн аягында $(t=7)$.

Чыгаруу. Эмгек өндүрүмдүүлүгү туунду менен туюнтулат

$$v(t) = MQ(t) = Q'(t),$$

ал эми ылдамдыгы жана анын өзгөрүү темпи - тиешелүү түрдө туунду

$$v'(t) = Q''(t)$$

жана логарифмалык туунду

$$T_v(t) = (\ln v(t))' = \frac{v'(t)}{v(t)}.$$

Берилген өндүрүштүк функция үчүн төмөнкүлдөрдү табабыз:

$$v(t) = Q'(t) = -6t^2 + 60t + 48 \text{ (бирд./ саат)},$$

$$v'(t) = (-6t^2 + 60t + 48)' = -12t + 60 \text{ (бирд./ саат}^2\text{)},$$

$$T_v(t) = \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{-12t+60}{-6t^2+60t+48} \text{ (бирд./ саат)}.$$

Убакыттын берилген $t_1 = 1,\ t_2 = 4,\ t_3 = 7$ моменттеринде төмөнкүгө ээ болобуз:

$$v(1) = 102, v'(1) = 48, T_v(1) = \frac{48}{102} = \frac{8}{17};$$

$$v(4) = 192, v'(4) = 12, T_v(4) = \frac{12}{192} = \frac{1}{16};$$

$$v(7) = 174, v'(7) = -24, T_v(7) = -\frac{24}{174} = -\frac{4}{29};$$

Ошентип, жумуш күнүнүн акырына карата эмгек өндүрүмдүлүгү төмөндөйт; $v'(t)$ жана $T_v(t)$ белгисинин плюстен минуска өзгөрүшү эмгек өндүрүмдүүлүктүн жогорулагандыгы

жумуш күнүнүн акыркы сааттарыда анын кыскарышы менен алмаштырылгандыгын көрсөтөт.

3.Өндүрүш чыгымдары

Эгерде өндүрүштүк чыгымдар $y = C(q)$ (кээ бир продукциянын q нускасын чыгарууга кеткен чыгым) болсо, анда $y' = C'(q)$ өндүрүштүн пределдик чыгымдарын билдирет жана кошумча продукциянын бирдигин өндүрүүгө өзгөрүлмө чыгымдардын өсүшүн болжолдуу мүнөздөйт: $MC = C'(q) \approx C(q + 1) - C(q)$ $(\Delta q = 1)$. Орточо чыгымдар продукцияны өндүрүүнүн бирдигине кеткен чыгымдар болот: $AC(q) = \frac{C(q)}{q}$.

615. Фирманын чыгымдарынын функциясы $C(q) = 4q + 2q^2$ формуласы менен берилген. Эгерде 10 бирдик өндүрүшү компанияга 60 миң \$ киреше алып келсе, фирма өзүнүн продукциясын кандай баада сатат?

Чыгаруу. Фирманын суммардык кирешеси pq көбөйтүндүсүнө барабар, ошондуктан суммардык пайда

$$\Pi = pq - (4q + 2q^2).$$

$q = 10$ болгондо пайда $\Pi = 60$ миң \$. Ошондуктан $60 = p \cdot 10 - (4 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2)$, демек $p = 30$ мин \$. Ошентип, фирма өзүнүн продукциясын $p = 30$ мин \$ баада сатат.

616. C өндүрүштүк чыгымдар менен q продукциянын көлөмүнүн ортосундагы көз карандылык $C = 100q + 4q^2 - 0{,}05q^3$ функциясы менен туюнтулат. Продукциянын кандай көлөмүндө пределдик жана орточо чыгашалар дал келет? Орточо жана пределдик чыгымдарды аныктоо: а) $q = 25$
бирд.; б) $q = 50$ бирд. Кандай учурда өндүрүштүн көлөмүн көбөйтүү пайдалуу?

Пределдик жана орточо чыгымдар тиешелүү түрдө барабар:

$$MC(q) = C'(q) = 100 + 8q - 0{,}15q^2,$$

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 100 + 4q - 0{,}05q^2.$$

Алынгандарды барабарлап $100 + 8q - 0{,}15q^2 = 100 + 4q - 0{,}05q^2 \Rightarrow 4q = 0{,}1q^2 \Rightarrow q = 40\ (q \neq 0)$.

Ошентип, $q=40$ бирдикте пределдик жана орточо чыгымдар бирдей.

Пределдик чыгым орточо чыгымдан азыраак $q > 40$ болгондо $C'(q) < \frac{C(q)}{q}$, тескерисинче $q < 40$ болгондо $C'(q) > \frac{C(q)}{q}$.

Ошентип, $q = 25$ болгондо: $C'(q)|_{q=25} = 100 + 8 \cdot 25 - 0{,}15 \cdot 25^2 = 206{,}25, \left.\frac{C(q)}{q}\right|_{q=25} = 100 + 4 \cdot 25 - 0{,}15 \cdot 25^2 = 168{,}75.$
Пределдик чыгымдар орточо чыгашалардан ашат, ошондуктан $q < 40$ болгондо өндүрүштүн көлөмүн көбөйтүү пайдасыз.

$q = 50$ болгондо: $C'(q)|_{q=50} = 100 + 8 \cdot 50 - 0{,}15 \cdot 50^2 = 125,$

$\left.\frac{C(q)}{q}\right|_{q=50} = 100 + 4 \cdot 50 - 0{,}15 \cdot 50^2 = 175.$ Пределдик чыгымдар орточодон аз, ошондуктан $q > 40$ болгондо өндүрүштүн көлөмүн кеңейтүү пайдалуу.

4. **Суроо-талап функциясы** $QD \coloneqq D(p)$ - белгилүү бир товарга суроо-талаптын (demand) анын баасынан p (price) көз карандылыгы. Мисалы, кандайдыр бир товарга болгон суроо-талап функциясы төмөнкү туюнтма менен аныкталат:

$$QD = D(p) = kp^a + c, \qquad (1)$$

мында $a < 0$. Баа p канчалык төмөн болсо, калктын туруктуу сатып алуу жөндөмдүүлүгүнө ээ болгон товарга талап ошончолук чоң болот. Суроо-талап функциясы баанын төмөндөө функциясы болгондуктан, анын туундусу терс, ал эми туундунун абсолюттук мааниси анын баасы бир бирдикке өскөндө товарга болгон сатып алуучулардын талаптарынын төмөндөшүн көрсөтөт.

5. Сунуш функциясы $QS \coloneqq S(p)$ – сунуштун (supply) кандайдыр бир товарга анын баасынан көз карандылыгы. Товардын баасы өскөн сайын сунуш көбөйөт, демек S сунуштун p баадан көз карандылыгын төмөнкү барабардык менен моделдештирүүгө болот:

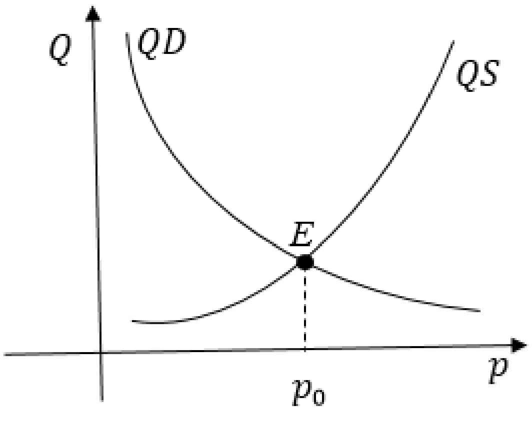
$$QS = S(p) = p^b + d, \qquad (2)$$

мында $b \geq 1$. Сунуш функциясынын туундусу баанын бир бирдикке өсүшү менен сатуучулар тарабынан (өндүрүүчүлөрдөн) товарлардын сунушунун болжолдуу өсүшүн берет.

Экономика үчүн *тең салмактуулук шарты* кызыктырат, б.а. суроо-талап сунушка барабар болгон шарт; бул шарт төмөнкү теңдеме менен берилет

$$QS = QD \qquad (3)$$

жана QS жана QD ийри сызыктарынын кесилиши E чекитине туура келет, ал тең салмактуулук чекити деп аталат (сүр.70). (3) шарты аткарылган p_0 баасы тең салмактуу баа деп аталат.

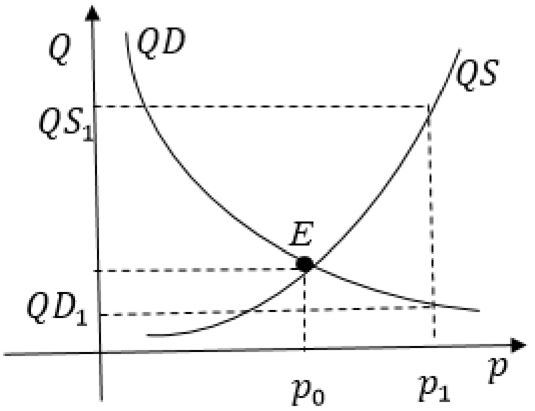


Сүр.70. Тең салмактуулук чекити

Реалдуу базарда суроо-талап менен сунуш дайыма тең салмакта боло бербейт, бирок тең салмактуулукка тенденциянын бар экендиги жөнүндө айтууга болот.

p_1 базарында белгиленген иш жүзүндөгү баа кандайдыр бир себептерден улам p_0 тең салмактуу баадан ашып кетти деп эсептейли (сүр.71). Ишканалар бул баада сатып алуучуларга караганда көбүрөөк товарларды сатууга даяр:

$$QS_1 > QD_1.$$



Сүр.71. Базар тең салмактуулугун орнотуу

Бара-бара базар баасынын тең салмактуулук деңгээлине чейин төмөндөшүнө алып келген ашыкча сунуш пайда болот.

Тескерисинче, эгерде иш жүзүндөгү баа тең салмактуу баадан төмөн болсо, анда базарда товарлардын жетишсиздиги пайда болуп, баанын тенденциясы тең салмактуулук деңгээлине чейин көтөрүлөт.

617. $s = 4p - 8$ сунуш функциясы берилген, мында p – товардын баасы. Эгерде талап-сунуштун тең салмактуу көлөмү 8ге барабар болсо, анда суроо-талап функциясы $q = q(p)$ төмөнкүдөй түргө ээ болушу мүмкүн

1) $q = 10 - p + \sqrt{p}$; 2) $q = 20 - 2\sqrt{p}$; 3) $q = \frac{20}{\sqrt{p}}$; 4) $q = 2p$.

Чыгаруу. $s = 8$ шартынан талап-сунуштун тең салмактуу баасын эсептейбиз: $8 = 4p - 8$. Бул теңдемени чыгарып $p = 4$ экендигин алабыз. Анда суроо-талап функциясы катары координаталары $p = 4$, $q = 8$ болгон чекит аркылуу өткөн кемүүчү функцияны алсак болот. Мисалы, $q = 10 - p + \sqrt{p}$ функциясы бул шарттар менен канааттандырылат. Анын туундусу $q' = \left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{p}}\right)\Big|_{p=4} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} < 0$. $p = 4$, $q = 8$ чекити $q = 2p$ теңдемесин да канааттандырат, бирок $q' = 2 > 0$, б.а. $q = 2p$ функциясы суроо-талаптын функциясы боло албайт, анткени өсөт.

618. Базарда кээ бир товарга суроо-талап жана сунуш сызыктуу көз карандылыктар менен сүрөттөлөт: $Q(p) = 23 - 3p, S(p) = 5 + 6p$. p нын кандай маанилернде товардын жетишсиздиги пайда болот жана баанын кандай маанилеринде ашыкча товарлар пайда болушат? Бул учурлардын ар биринде базар бааларынын өзгөрүшү жөнүндө эмне айтууга болот?

Чыгаруу. Тең салмактуу баа $23 - 3p = 5 + 6p$ теңдемесинен аныкталат. Аны чыгарып $p_0 = 2$ экендигин табабыз.Эгерде $p > 2$ болсо, анда ишканалар сатып алуучулар бул баада сатып ала турган товарларды сатууга даяр, ашыкча товарлар пайда болот, бул учурда базар бааларын тең салмактуулук деңгээлине чейин түшүрүү керек. Эгерде $p < 2$ болсо, анда базарда сунуш жетишсиз, товарлардын жетишсиздиги келип чыгат, базар бааларын тең салмактуу деңгээлине көтөрүү тенденциясы пайда болот.

6. Керектөө жана үнөмдөө функциясы

Эгерде x – улуттук киреше, $C(x)$ – керектөө функциясы (коротулган кирешенин бөлүгү), ал эми $S(x)$ - үнөмдөө функциясы (калктын үнөмдөөсү), анда $x = C(x) + S(x)$. Дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1,$$

мында $\frac{dC}{dx}$ - керектөөгө пределдик ыктуулук; $\frac{dS}{dx}$ - сактоого болгон пределдик ыктуулук.

§ 4.3. ФУНКЦИЯНЫН ИЙКЕМДҮҮЛҮГҮ ЖАНА АНЫН ЭКОНОМИКАЛЫК ТАЛДООДО КОЛДОНУЛУШУ

Аныктама. $y = f(x)$ функциясынын x аргументи боюнча $E_x(y)$ ийкемдүүлүгү деп y функциясынын салыштырмалуу өзгөрүшүнүн x өзгөрүлмөсүнүн салыштырмалуу өзгөрүшүнө болгон катышынын $\Delta x \to 0$ умтулгандагы предели аталат.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = x \cdot \frac{y'}{y}.$$

Экономикадагы ийкемдүүлүктүн түрлөрү

Суроо-талап чоңдугунун салыштырмалуу өзгөрүшүн (пайыз менен чагылдырылган) $Q_D := D(p)$ (керектөө көлөмүн) кандайдыр бир товарга бул товардын баасы p 1% ке өзгөргөндө көрсөтүүчү суроо-талаптын баа боюнча ийкемдүүлүгү $E_p(D) = p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)}$. Суроо-талап функциясынын туундусу терс ($D(p)$ функциясы кемийт) жана талаптын ийкемдүүлүгү да терс белгиге ээ.

$E_p(D)$ чоңдугунан көз каранды талаптын үч түрү бар:

1. Эгерде $|E_p(D)| > 1$ $\left(E_p(D) < -1\right)$ болсо, анда суроо-талап ийкемдүү деп эсептелет. Бул учурда баанын 1% ке өсүшү суроо -талаптын бир пайыздан ашык төмөндөшүнө туура келет, ал эми тескерисинче, бир пайызга баанын төмөндөшү сатып алуунун 1% тен ашык өсүшүнө алып келет.

2. Эгерде $|E_p(D)| < 1$ $\left(-1 < E_p(D) \leq 0\right)$ болсо, анда суроо-талап ийкемдүү эмес. Бул учурда баанын 1% га өсүшү суроо-талаптын 1% тен азыраак төмөндөшүнө алып келет, ал эми тескерисинче, баанын 1% ке төмөндөшү сатып алуулардын 1% тен ашык өсүшүнө алып келет.

3. Эгерде $|E_p(q)| = 1$ $\left(E_p(q) = -1\right)$ болсо, анда суроо-талап нейтралдуу болот.

619. $QD = D(p) = ap^b$ болсун, мында $a \geq 0, b < 0$.

$$E_p(D) = p \cdot \frac{D'}{D} = p \cdot \frac{abp^{b-1}}{ap^b} = b.$$

$E_p(D)$ p нын бардык маанилеринде б.а. суроо-талаптын ийриси $D(p) = ap^b$ мында $a \geq 0, b < 0$, b га барабар болгон турактуу ийкемдүүлүккө ээ.

620. Адатта экономикада баа вертикалдык окко жана суроо-талаптын чоңдугу горизонталдык огуна коюлат, көп учурда суроо-

талаптын теңдемеси q pдан функция эмес, баасы суроо-талаптын функциясы болгон $q := Q_D = D(p)$ деп жазылат. Суроо-талаптын теңдемесин карайбыз: $p = 940 - 48q + q^2$. Продукциянын 10 бирдиги сатылса, талаптын баа ийкемдүүлүгү кандай болот?

$q = 10$ болгондо $p = 940 - 480 + 100 = \$560$. $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{dp/_{dq}} = \frac{1}{-48+2q}$ табабыз. $q = 10$ болгондо $q' = \frac{dq}{dp} = \frac{1}{-48+2\cdot 10} = -\frac{1}{28}$. Ошондуктан $E_p(q) = p \cdot \frac{q'}{q} = 560 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{28}\right)}{10} = -2$. Ошентип, 560 доллардын учурдагы баасына 1% ке өзгөрүү талаптын чоңдугун 2% ке карама-каршы багытта өзгөртөт. Биз 560$ баасы боюнча талап ийкемдүү деп жыйынтык чыгарабыз.

Суроо-талаптын киреше ийкемдүүлүгү $E_R(q) = \frac{dq}{dR} \cdot \frac{R}{q}$ $(q := Q_D = D(p))$, бул товарды керектөөчүлөрдүн кирешеси $R = R(q)$ 1%ке өзгөргөндө кандайдыр бир товарга q талаптын чоңдугунун салыштырмалуу өзгөрүшүн (пайыз менен) мүнөздөйт.

Талаптын оң киреше ийкемдүүлүгү жогорку сапаттагы товарларды, ал эми терс чоңдук сапатсыз товарларды мүнөздөйт.

Ошентип, тармактагы кирешеге талаптын оң коэффициентинин жогору болушу анын экономикалык өсүшкө кошкон салымы экономиканын структурасындагы үлүшүнөн жогору экендигин жана анын кеңейүү мүмкүнчүлүгүнө ээ экендигин көрсөтөт. Тескерисинче, кирешелер боюнча тармактын продукциясына талаптын ийкемдүүлүк коэффициенти анча чоң эмес оң же терс мааниге ээ болсо, анда аны токтоп калуу жана өндүрүштүн кыскаруу перспективасы күтүшү мүмкүн.

Сунуштун баа боюнча ийкемдүүлүгү $E_p(S) = \frac{dS}{dp} \cdot \frac{p}{S} = p \cdot \frac{S'}{S}$, бул товардын баасы 1% ке өзгөргөндө ар кандай товардын сунуш чоңдугунун $S = S(p)$ салыштырмалуу өзгөрүшүн (пайыз менен чагылдырылган) көрсөтүү. Сунуш функциясынын туундусу оң, ал эми сунуштун ийкемдүүлүгү да оң; $0 < E_p(S) < 1$ болгондо ийкемдүү эмес, $E_p(S) > 1$ болгондо ийкемдүү.

Ийкемдүүлүк менен сатуучулардын кирешесинин ортосундагы байланыш (кардарлардын чыгашалары)

R киреше p баанын товардын талап чоңдугу $q := D(p)$ менен көбөйтүндүсүнө барабар:

$$R = pq.$$

Функциялардын көбөйтүндүсүнүн ийкемдүүлүк үчүн формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$E_p(R) = E_p(q) + E_p(p) = E_p(q) + 1 = 1 - \left|E_p(q)\right|,$$

анткени талаптын баа боюнча ийкемдүүлүгү дайыма терс ($q'(p) < 0$ болгондуктан). Эми жогоруда келтирилген талаптын ийкемдүүлүгүнүн бардык варианттарын талдап көрөлү.

1. $E_p(q) < -1$; анда кирешенин баа ийкемдүүлүгү терс ($E_p(R) < 0$). Бул ийкемдүү талап менен кирешенин өзгөрүшү баанын өзгөрүшүнө карама-каршы багытта болот жана кирешени көбөйтүү үчүн сатуучулар үчүн бааны төмөндөтүү пайдалуу экенин билдирет. Ошо сыяктуу эле, ийкемдүү суроо-талап менен товарга салыкты көбөйтүү салык салуунун кирешесинин түшүүсүн азайтат.
2. $-1 < E_p(q) < 0$; анда ийкемсиз суроо-талаптары бар товарлар үчүн $E_p(R) > 0$. Бул баанын өзгөрүшү кирешенин ошол эле багытта өзгөрүшүнө алып келет жана сатуучулар үчүн бааны көтөрүү пайдалуу (бул алардын кирешесинин көбөйүшүнө алып келет) дегенди билдирет
3. $E_p(q) = -1$. Бул учурда $E_p(R) = 0$, б.а. нейтралдуу суроо-талап болгондо, буюмдун баасынын өзгөрүшү кирешеге таасир этпейт

Ийкемдүү суроо-талапта сандын көбөйүшү менен же баанын төмөндөшү менен киреше көбөйөт, ал эми ийкемсиз талап менен төмөндөйт. Мисалы, дыйкандардын кирешеси жакшы түшүм алган учурда да төмөндөйт, анткени айыл чарба азыктарына талаптын ийкемдүүлүгү бир топ төмөн.

Ушул сыяктуу эле, мамлекеттик кирешелердин бюджетке түшүүсүн көбөйтүү максатта, мамлекеттик ишканаларда бааларды жогорулатуу, мисалы, поезд билеттеринин баасын көтөрүү, эгерде тиешелүү товарга же кызматка талап ийкемдүү болсо, бюджетке киреше түшүүлөрдүн кыскарышына алып келиши мүмкүн.

Баанын, баанын ийкемдүүлүгүнүн жана кирешенин өзгөрүшү

Баанын өзгөрүшү	Ийкемдүү суроо-талап: $\lvert E_p(q)\rvert > 1$	Ийкемсиз суроо-талап: $0 < E_p(q) < 1$	Суроо-талаптын жалгыз ийкемдүүлүгү: $E_p(q) = -1$
$p\downarrow$	$R\uparrow$	$R\downarrow$	Киреше өзгөрбөйт
$p\uparrow$	$R\downarrow$	$R\uparrow$	Киреше өзгөрбөйт

621. Суроо-талап функциясы $q(p) = p_0 e^{-0{,}125p^2}, p_0 > 0$ баа боюнча берилген. Баанын кандай маанилеринде суроо-талап ийкемдүү, нейтралдуу жана ийкемсиз экендигин түшүндүргүлө.

Чыгаруу. $q(p) = p_0 e^{-0{,}125p^2}, p_0 > 0$ функциясынын ийкемдүүлүгүн табабыз

$$E_p(q) = \frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = \frac{p}{p_0 e^{-0{,}125p^2}}\cdot\left(-0{,}25p_0 p e^{-0{,}125p^2}\right)$$
$$= -0{,}25p^2.$$

Эгерде $\lvert E_p(q)\rvert > 1$ $(\lvert E_p(q)\rvert < -1)$ болсо, б.а. $-0{,}25p^2 < -1 \Leftrightarrow p^2 > 4 \Leftrightarrow p > 2$ суроо-талап ийкемдүү болот.

Эгерде $\lvert E_p(q)\rvert < 1$ $(-1 < \lvert E_p(q)\rvert \le 0)$ болсо, анда суроо-талап ийкемдүү эмес. Ошондуктан $-0{,}25p^2 > -1 \Leftrightarrow p^2 < 4$. Бул шартты $0 < p < 2$ маанилери канааттандырат.

Аягында, эгерде $|E_p(q)| = 1$ $(|E_p(q)| = -1)$ болсо, анда суроо-талап нейтралдуу болот б.а.

$$-0{,}25p^2 = -1 \Leftrightarrow p^2 = 4 \Leftrightarrow p = 2\,.$$

622. q суроо-талаптын жан p баадан s сунуштун функциялары теңдемелер менен туюнтулган: $q = 100\left(10 - \sqrt{p}\right), s = 2p + 72$. Табуу керек:

- тең салмактуу бааны;
- тең салмактуу баадагы талаптын ийкемдүүлүгүн;
- тең салмактуу баадагы сунуштун ийкемдүүлүгүн;
- тең салмактуу баадагы кирешенин ийкемдүүлүгүн.

Чыгаруу. $q = s$ теңдемесинен тең салмактуу баа табылат:

$$100\left(10 - \sqrt{p}\right) = 2p + 72 \Leftrightarrow p + 50\sqrt{p} - 464 = 0.$$

$\sqrt{p} = t$ менен белгилейбиз. $t^2 + 50t - 464 = 0$ теңдемесинин тамырлары $t_1 = -58, t_2 = 8$ сандары болот. Ошондуктан тең салмактуу баа $p = 64$.

$E_p(q) = \frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}$ формуласыны менен $q = 100\left(10 - \sqrt{p}\right)$ функциясы үчүн тең салмактуу баасы боюнча суроо-талаптын ийкемдүүлүгүн эсептейбиз.

$$E_p(q) = \frac{p}{100\left(10-\sqrt{p}\right)}\cdot 100\left(-\frac{1}{2\sqrt{p}}\right) = -\frac{\sqrt{p}}{2\left(10-\sqrt{p}\right)}\Bigg|_{p=64}$$
$$= \frac{\sqrt{64}}{2\left(10-\sqrt{64}\right)} = -2.$$

Анткени $|E_p(q)| = 2 > 1$, суроо-талап ийкемдүү. Баанын 1%ке өсүшү суроо-талаптын 2%ке төмөндөшүнө алып келет.

$s = 2p + 72$ функциясы үчүн тең салмактуу баадагы сунуштун ийкемдүүлүгү $E_p(s) = \frac{p}{s}\cdot\frac{ds}{dp}$ формуласнын жардамы

менен ушундай эле табылат: $E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot \frac{ds}{dp} = \frac{p}{2p+72} \cdot 2\Big|_{p=64} = \frac{128}{200} = 0,64$.

Баанын 1%ке өсүшү сунуштун 0,64%ке өсүшүнө алып келет.

Кирешенин ийкемдүүлүгүн тең салмактуу баа боюнча эсептеп көрөлү. Фирма алган киреше товардын бирдигинин баасынын сатылган бирдиктердин санына болгон көбөйтүндүсүнө барабар:

$$R = pq = 100\left(10 - \sqrt{p}\right).$$

Ошондуктан

$$E_p(R) = \frac{p}{100p\left(10 - \sqrt{p}\right)} \cdot 100\left(10 - \frac{3}{2}\sqrt{p}\right) = \frac{10 - \frac{3}{2}\sqrt{p}}{\left(10 - \sqrt{p}\right)}\Bigg|_{p=64}$$

$$= \frac{10 - \frac{3}{2}\sqrt{64}}{\left(10 - \sqrt{64}\right)} = -1.$$

Ошентип, баанын 1% өсүшү кирешенин 1% төмөндөшүнө алып келет ($E_p(R) = -1$).

623. Фармацевтикалык компания рынокко жаңы дары сунуштайт. Рыноктук талап $q = 4000 - 10p$ катары бааланат, мында $q := Q_D = D(p)$ – талаптын көлөмү (мин бир.); p – баа ($). Фирманын кирешеси суроо-талаптын кандай ийкемдүүлүгүндө максималдуу болот? Кандай баада фирма эң көп кирешени алат?

Чыгаруу. Компаниянын алган кирешеси товардын бирдигинин баасынын суроо-талаптын чоңдугуна болгон көбөйтүндүсүнө барабар: $R = pq = p(4000 - 10p\,) = 4000p - 10p^2$. Ошондуктан, фирманын кирешеси $R' = (\,4000p - 10p^2)' = 4000 - 20p = 0$ шартында өзүнүн максимумуна жетет, б.а. фирма p = 200 ($) баада максималдуу киреше алат. Суроо-талаптын тиешелүү ийкемдүүлүгү төмөнкүгө барабар:

$$E_{p=200}(q) = \frac{p}{q} \cdot q' \Big|_{p=200} = \frac{p}{4000 - 10p} \cdot (4000 - 10p)'|_{p=200}$$

$$= \frac{-10p}{4000 - 10p}\Big|_{p=200} = -1.$$

624. Суроо-талаптын туруктуу ийкемдүүлүгү менен талап ийри сызыгы $q = q(p)$ баасында төмөнкүдөй түрдө болушу мүмкүн

1) $q = p_0 p^{-1}, p_0 > 0;$
2) $q = p_0 - p, p_0 > 0;$
3) $q = \frac{p_0}{p-1}, p_0 > 0;$
4) $q = p_0 e^{-p}, p_0 > 0;$

Чыгаруу. Берилген функциялар үчүн суроо-талаптын баа боюнча ийкемдүүлүк коэффициенттерин формула $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'$ аркылуу эсептейбиз.

Анда $q = p_0 p^{-1}, p_0 > 0$ функция үчүн

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot p_0 \left(-\frac{1}{p^2}\right) = -\frac{p_0}{pq} = -\frac{p_0}{pp_0 p^{-1}} = -1;$$

$q = p_0 - p, p_0 > 0$ функциясы үчүн $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot (-1) = -\frac{p}{q} = -\frac{p}{p_0 - p};$

$q = \frac{p_0}{p-1}, p_0 > 0$ функциясы үчүн $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \left(-\frac{p_0}{(p-1)^2}\right) = -\frac{p(p-1)}{p_0} \frac{p_0}{(p-1)^2} = -\frac{p}{p-1};$

$q = p_0 e^{-p}, p_0 > 0$ функциясы үчүн $E_p(q) = \frac{p}{p_0 e^{-p}} \cdot (-p_0 e^{-p}) = -p.$

Демек, туура жооп $q = p_0 p^{-1}, p_0 > 0.$

625. Алгач киного билеттер 400 сомдон сатылып, келгендердин саны жумасына 800 адамды түзгөн. Эгерде суроо-

талаптын баа боюнча ийкемдүүлүгү 2,5 экени белгилүү болсо, бааларды 300 сомго чейин төмөндөткөндөн кийин кинотеатрга баруу кандай өзгөрөт? Кинотеатрдын суммардык кирешеси кандай өзгөрөт?

Суроо-талаптын чоңдугу төмөнкү түрдөгү теңдеме менен сүрөттөлөт: $q = a - bp, a > 0, b > 0$. Шарт боюнча $p = 400$ баада суроо-талап $q = 800$, б.а. $800 = a - b \cdot 400$, $p = 300$ баада суроо-талап $q = q_1$, б.а. $q_1 = a - b \cdot 300$. Суроо-талаптын баа боюнча ийкемдүүлүгү 2,5:

$$E_p(q)\big|_{p=400,q=800} = \frac{p}{q} \cdot q'\Big|_{p=400,q=800} = \frac{p}{a - bp} \cdot (-b)|_{p=400,q=800}$$

$$= \frac{400}{800}(-b) = -2{,}5.$$

Мындан $b = 5$ жана $800 = a - b \cdot 400$ теңдемесин эске алуу менен $a = 2800$ алабыз. Ошентип, $p = 400$ боюнча киреше $R = pq = 400(2800 - 5p)|_{p=400} = 400 \cdot 800 = 320000.$ $p = 300$ баада суроо-талап $q_1 = 2800 - 5 \cdot 300 = 1300$.

Кинотеатрдын кирешеси төмөнкүгө барабар болот: $R = pq = 300 \cdot 1300 = 390000$.

Ошентип, жалпы киреше 70 000 сомго көбөйдү, бул баштапкы кирешенин болжол менен 22% тин түзөт.

Көнүгүүлөр

626. Керектөөчү үчүн x товардын U жалпы пайдалуу функциясы төмөнкүдөй түргө ээ: $U = 130x - 2{,}5x^2$, мында x – убакыт бирдигине керектелген товардын көлөмү. Жалпы пайдалуулук максималдуу болгон жана керектөөчү каныккан чекке жеткен чекит... барабар.

1) 26; 2) 0; 3) 52; 4) 2,5.

627. U пайдалуу функциясы $U = 15q + 7q^2 - (1/3)q^3$теңдеме менен берилсин. Анда азайган чектүү

пайдалуулуктун мыйзамы иштей баштаган q керектөө көлөмү ... барабар.

1) 7; 2) 0; 3) 15; 4) -1.

628. Талаптын горизонталдуу ийри сызыгы учурдагы рыноктук баага толук ийкемдүү.Эмне үчүн?

629. Талаптын вертикалдуу ийри сызыгы толугу менен ийкемдүү эмес. Эмне үчүн?

630. Бирдик ийкемдүүлүгү бар талаптын ийри сызыгына мисал келтириңиз.

631. Эгерде даяр продукцияны чыгаруунун көлөмү у (млн. рубль) менен өндүрүштүк фонддордун көлөмүнүн x (млн. сом) ортосундагы көз карандылык $y = 0{,}65x - 0{,}4\sqrt{x} - 6{,}2$ теңдемеси менен туюнтулса, анда 36 миллион сом өлчөмүндө фонду болгон ишкана үчүн продукцияны чыгаруунун ийкемдүүлүгү ... барабар.

1)1,5; 2) 0,5; 3)0,25; 4) 1.

632. Кээ бир өлкөнүн керектөө функциясы төмөнкү түргө ээ: $C(x) = -21{,}12 - 0{,}35x + 0{,}36x^{\frac{5}{6}}$, мында x жалпы улуттук киреше. Эгерде улуттук киреше 256 бирдик болсо, анда керектөөнүн киреше ийкемдүүлүгү $E_x(C)$ ... барабар.

1) 0,8; 2) 0,6; 3) 0,4; 4) 1.

633. Кээ бир өлкөнүн керектөө функциясы төмөнкү түргө ээ: $C(x) = -21{,}12 - 0{,}35x + 0{,}36x^{\frac{5}{6}}$, мында $x-$ жалпы улуттук киреше. Эгерде улуттук киреше 32 бирдик болсо, анда керектөөнүн киреше ийкемдүүлүгү $E_x(C)$ ... барабар.

1) 2,5; 2) 0,5; 3) 0,25; 4) 1.

634. $p = a + bq - cq^2, a > 0, b > 0, c > 0$ теңдеме менен берилген талаптын ийри сызыгын карап көрөлү. Бул ийри сызыктын орточо, жалпы жана пределдик кирешесин тапкыла. Талап ийри сызыктары жана жалпы кирешенин жана баанын ийкемдүүлүгүнүн ортосундагы байланышты изилдегиле. Геометриялык иллюстрация келтиргиле.

635. Кээ бир керектөө товарларына талап q алардын p баасынан төмөнкүдөй түрдө көз каранды: $q = \frac{400}{\sqrt{p}} - 2$. ... болгондо талап нейтралдуу болот (бирдик ийкемдүүлүк менен).

1) p =10000; 2) 100; 3) $p > 100$; 4) 0< p <100.

636. Басма китептин баштапкы баасы 12 доллар экенин аныктаган. ал жумасына 100 нусканы сата алат, ал эми баалар 16 АКШ долларына чейин көтөрүлгөндөн кийин – болгону 90 нуска. Талаптын баа боюнча ийкемдүүлүгү кандай өзгөрдү?

637. Бизнесмен Адилет эл керектөөчү товарларды чыгарган чакан ишкана ачууну чечти. Статистика менен таанышкандан кийин, ал талап q менен буюмдадын бирдигине болгон баанын ортосундагы көз карандылык $q = 60 - 2\sqrt{p}$ формуласы менен туюнталарын көрдү. Талаптын ийкемдүүлүгүн тапкыла. Баанын кандай маанисинде талап ийкемдүү, нейтралдуу жана ийкемдүү эмес экенин түшүндүргүлө. $p = 324$ жана $p = 484$ акча бирдиктер болгондо Адилетке продукциянын бирдигинин баасы жөнүндө кандай сунуштарды берүүгө болот.

638. Tastee Food компаниясынын маалыматы боюнча, анын азыктарына болгон талап менен киреше байланышы $q = 500 - 0{,}1R$ теңдемеси менен сүрөттөлөт, мында $q -$ өндүрүш бирдиктери, ал эми $R -$ үй-бүлөнүн орточо кирешеси.

a. $I = \$1500, I = \$2000$ болгондо талаптын киреше ийкемдүүлүгүн аныктагыла.

b. Мурунку эсептегичтердин натыйжасы кирешенин өсүшү менен $E_R(q)$көбөйөрүн көрсөтүшү керек. Эмне үчүн мындай? Бул байланыш $q = 0{,}1R$ учурунда сакталабы?

§ 4.4. ЭКОНОМИКАДАГЫ ФУНКЦИЯНЫ ИЗИЛДӨӨ. ПАЙДАНЫ МАКСИМАЛДАШТЫРУУ

q- сатылган товардын саны, $R(q)$ - кирешенин (кирешенин) функциясы, $C(q)$ - продукциянын q бирдигин чыгаруу менен байланышкан өндүрүштүк чыгымдар болсун. Фирма тарабынан өндүрүштүн оптималдуу көлөмүн тандоо маселесин карап көрөлү. Өндүрүлгөн товарларды сатуудан түшкөн пайданын функциясын төмөнкүдөй көз карандылык менен моделдештирүүгө болот

$$\pi q = R(q) - C(q) \qquad (1)$$

Микроэкономикада белгилүү сөз бар: пайданы максималдаштыруу үчүн пределдик киреше менен пределдик чыгымдар бирдей болушу керек, ошондуктан бул принципти төмөнкүчө жазууга болот

$$R'(q) = C'(q) \qquad (2)$$

Чынында эле, (1) функциясы үчүн экстремум үчүн зарыл шарттан $\pi'(q) = 0$ экени келип чыгат, андан негизги принцип алынат.

Пределдик киреше менен талаптын баа ийкемдүүлүгүнүн ортосундагы байланышты табалы:

$$R'(q) = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p}p'_q\right) = p\left(1 + E_q(p)\right).$$

Өз ара функциялардын ийкемдүүлүгү үчүн (3.11) формулага ылайык, баага салыштырмалуу талаптын ийкемдүүлүгү тескери экендигин эске алып, талапка салыштырмалуу баанын ийкемдүүлүгү, б.а. $E_q(p) = \frac{1}{E_p(q)}$, жана ошондой эле $E_p(q) < 0$ болсо, ыктыярдуу талап үчүн төмөнкүнү алабыз

$$R'_q(q) = p\left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|}\right). \qquad (3)$$

Эгерде талап ийкемсиз болсо, б.а. $|E_p(q)| < 1$, анда (3) га ылайык пределдик киреше $R'_q(q)$ каалаган баада терс болот; эгерде талап ийкемдүү болсо, б.а. $|E_p(q)| > 1$, анда пределдик киреше оң болот. Ошентип, ийкемсиз талап үчүн баанын жана пределдик кирешенин өзгөрүүсү бир багытта, ал эми ийкемдүү талап үчүн ар кандай багытта болот.

(3) катышы универсалдуу баа эрежесин түзүүгө жана оптималдуу баа деңгээлин тандоого шарт түзөт. Корутунду чыгаруу үчүн биз (3) катышын, ошондой эле (2) пайданы максималдаштыруу шартын колдонобуз:

$$C'_q = p\left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|}\right).$$

Мындан универсалдуу баа эрежеси келип чыгат:

$$p = \frac{C'_q}{1 - \frac{1}{|E_p(q)|}} \quad (4)$$

мында $p -$ оптималдуу баа.

Мисалдарды карайбыз.

639. Монополисттик фирманын продукциясына талаптын баа ийкемдүүлүгү $E_p(q) = -1{,}5$ барабар. Пределдик чыгым өндүрүш бирдигине 6 долларды түзөт. Компанияга максималдуу киреше берген бааны тапкыла.

Чыгаруу. (4) формуласы боюнча баа $\frac{6}{1 - \frac{1}{1{,}5}} = 18$ деңгээлинде белгилениши керек.

640. Эгерде учурдагы рыноктук баасы \$20 болсо жана жалпы чыгым функциясы $C = C(q) = 15 + 17q - 4q^2 + q^3$ түрүндө болсо, максималдуу пайданы тапкыла.

Чыгаруу. Жалпы киреше pq көбөйтүндүсүнө барабар жана $p = MR = \$20$ болсо, анда жалпы пайда

$$\pi = pq - C(q) = 20q - (15 + 17q - 4q^2 + q^3).$$

Пределдик пайда төмөнкү түрдө болот:

$$M\pi = \frac{d\pi}{dq} = 20 - (17 - 8q + 3q^2).$$

Пайданын туундусун нөлгө барабарлап, $3 + 8q - 3q^2 = 0$ теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин тамырлары $q_1 = -\frac{1}{3}, q_2 = 3$. Текшерүү $q_2 = 3$ болгондо $\pi_{max} = \$3$ максималдуу пайдага жетишкенин көрсөтүп турат.

641. Божомолдорго ылайык ишкананын пайдасы $\pi(q) = q^2 - 8q + 10$ функциясы менен сүрөттөлөт, мында q – өндүрүш көлөмүн мүнөздөгөн маани (млн.сом). Ишкана чыгарган продукциянын оптималдуу көлөмүн тапкыла.

Чыгаруу. Фирманын чектүү пайдасы $M\pi = \frac{d\pi}{dq} = 2q - 8$. Туундусун нөлгө барабарлайбыз $M\pi = \frac{d\pi}{dq} = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{extr} = 4$. Чыгаруу көлөмү 4 кө барабар, фирма үчүн оптималдуубу? Туунду белгисинин өзгөрүшүнүн мүнөзүн карап көрөлү. $q < q_{extr} = 4 \rightarrow \pi'(q) < 0$ болгондо киреше кемийт.

$q > q_{extr} = 4 \rightarrow \pi'(q) > 0$ болгондо киреше өсөт.

Демек, $q_{extr} = 4$ экстремум чекитинде пайда минималдуу маанини алат, ошондуктан бул өндүрүштүн көлөмү фирма үчүн оптималдуу эмес. Фирма үчүн оптималдуу өндүрүү көлөмү кандай болот? Бул суроого жооп фирманын өндүрүштүк кубаттуулугун кошумча изилдөөдөн көз каранды болот. Эгерде фирма каралып жаткан мезгилдин ичинде 8 өндүрүш бирдигинен $(p(q = 0) = p(q = 8) = 10)$ көбүрөөк өндүрө албаса, анда фирма үчүн оптималдуу чечим таптакыр эч нерсе өндүрбөй эле, жайларды жана/же жабдууларды ижарага берүүдөн киреше алса болот. Эгерде фирма каралып жаткан мезгилдин ичинде продукциянын 8 бирдигинен ашык чыгарууга жөндөмдүү болсо, анда фирма үчүн

оптималдуу чечим , анын өндүрүштүк кубаттуулугунун чегинде чыгаруу болуп калат.

642. Өндүрүштүн баштапкы этабында фирма орточо чыгашаларды минимумга түшүрөт, ал эми чыгаша функциясы $C = C(q) = 200 + 10q + \frac{1}{2}q^2$ түрүнө ээ. Мындан ары товардын бирдигине баа 50 долларына барабар белгиленет. Фирма өндүрүштү канча бирдикке көбөйтүүсү керек? Орточо чыгымдар канчага өзгөрөт?

Чыгаруу. Орточо чыгымдар $\frac{C(q)}{q} = \frac{200+10q+\frac{1}{2}q^2}{q} = \frac{200}{q} + 10 + \frac{1}{2}q$. Чектик орточо чыгымдар $\left(\frac{C(q)}{q}\right)' = \left(\frac{200}{q} + 10 + \frac{1}{2}q\right)' = -\frac{200}{q^2} + \frac{1}{2}$ барабар. Орточо чыгымдар минималдуу болушу үчүн, ал туунду $\left(\frac{C(q)}{q}\right)' = 0$ болушу керек.

$-\frac{200}{q^2} + \frac{1}{2} = 0$ теңдемесин чыгарып $q = 20$ алабыз. $q = 20$ болгондо, орточо чыгымдардын минималдуу мааниси барабар:

$AC(q)|_{q=20} = \left(\frac{200}{q} + 10 + \frac{1}{2}q\right)\Big|_{q=20} = 30$. Чектик чыгымдар $MC(q) = C'(q) = 10 + q$. $p = 50$ туруктуу баада, пайданын оптималдуу мааниси: $\pi = pq - C(q) = 50q - 200 - 10q - \frac{1}{2}q^2 \to max$. Пайда максималдуу болуш үчүн чектик киреше жана чектик чыгашалар барабар болушу керек.

$$50 = 10 + q \Longrightarrow q_{\text{опт}} = 40.$$

Ошентип, продукцияны чыгарууну 20 бирдикке көбөйтүү керек, мындан орточо чыгашалар көбөйөт:

$$\left.\frac{C(q)}{q}\right|_{q=40}-\left.\frac{C(q)}{q}\right|_{q=20}=\left.\left(\frac{200}{q}+10+\frac{1}{2}q\right)\right|_{q=40}-\left.\left(\frac{200}{q}+10+\frac{1}{2}q\right)\right|_{q=20}=35-30=5.$$

Фирманын кирешеси жана белгилүү бир салык чени боюнча өкмөткө салыктардын түшүшүнүн көлөмү. Продукцияга болгон баа

$p=a-bq$, ал эми чыгымдар $C=cq^2+dq+e$, мында a,b,c,d,e – оң туруктуу сандар. Салык *t* чени менен акциз болуп калсын, б.а. ар бир сатылган товардын бирдиги үчүн салык *t* төлөнөт, ал эми салыктын бардык суммасы $T=tq$ га барабар. Ошентип, фирма $\pi=q(a-bq)-(cq^2+dq+e)-tq$ пайда табат. Аны максималдуу алуу максатында, фирма өндүрүштүн оптималдуу көлөмүн издейт. Максималдуу пайда алуу үчүн зарыл шарт $\pi'(q)=0$; мындан $q^*=\frac{a-d-t}{2(b+c)}$, ошол эле учурда $\pi''(q^*)=-2b-2c<0$, б.а. q^* чындыгында максимум чекити. $t>0$ болгондуктан, мындай салык системасы оптималдуу өндүрүштүн төмөндөшүнө алып келери айдан ачык.

Өкмөттүн (мамлекеттин) суммардык салыктык пайдасын өндүрүштүн q^* көлөмүндө эсептейбиз: $T=tq^*=t\cdot\frac{a-d-t}{2(b+c)}$. Суроо туулат: бардык продукцияга Т жалпы салык эң чоң болушу үчүн салык *t* кандай болушу керек? Мамлекеттик киреше ийри сызыгы бутактары ылдый карай багытталган параболаны берет.

$t^*=\frac{a-d}{2}$ болгондо максимумга жетет жана $T^*=\frac{(a-d)^2}{8(b+c)}$ барабар, ал эми t^* маанисинде оптималдуу өндүрүш $q_1=\frac{a-d}{4(b+c)}$ барабар, ал иэми фирманын кирешеси $\pi(q_1)=\frac{(a-d)^2}{16(b+c)}-e$ болот. *t* салык чени боюнча фирманын кирешеси $\pi(q^*)=\frac{(a-d-t)^2}{4(b+c)}-e$ барабар, мындан

t нын өсүшү менен киреше азаят $(0 \leq t \leq a - d)$. Белгиленген t боюнча мамлекеттик кирешелер оң болсо да, анда компаниянын пайдасы терс болгон бир катар салык ченде бар (атап айтканда, $t \geq t^0 = a - d - \sqrt{4e(b+c)}$). $t \geq t^0$ болгондо ишканалардын ишкердүү активдүүлүгүнүн кескин кыскарышы байкалат. Өндүрүүчүлөр салык тарифтерин төмөндөтүү үчүн эмне үчүн мынчалык көп күч-аракет жумшап жатканы түшүнүктүү.

Көнүгүүлөр

643. y продукцияны сатуунун көлөмү p баадан көз каранды: $y = 100 - 4p$. Бул учурда чыгымдар $C(y) = (y - 20)^2/8$ формула боюнча аныкталат. Оптималдуу өндүрүш көлөмүн жана ага тиешелүү пайданын жана чыгымдардын маанилерин тапкыла.

644. Монополисттин фирмасынын продукциясына суроо-талаптын баа ийкемдүүлүгү $E_p(q) = -2$ барабар. Чыгашалар $C(q) = 75 + 3q^2$ формуласы менен аныкталат. Фирманы өндүрүш көлөмү боюнча $q=10$ максималдуу пайда менен камсыз кылган бааны тапкыла.

645. Фермердик чарбанын кирешелеринин ортосундагы көз карандылык
(акча бирдиги/күн) жана анын кызматкерлеринин саны x төмөнкүдөй түргө ээ: $R(x) = 2500\sqrt{x}$. Эгерде жумушчунун күндөлүк эмгек акысы 360 (акча бирдиги) барабар, ал эми башка чарбалык чыгымдар $510 \ln x$ (акча бирдик) болсо, фермердик чарбанын оптималдуу өлчөмүн жана анын пайдасын тапкыла.

646. Фермердин короосунда ар биринин салмагы 200 кг. болгон 100 уй бар. Бир уйду багууга күнүнө 92 цент кетет. Уй күнүнө 2 килограммдан салмак кошот. Уйлардын базар баасы 1 кг 10 долларды түзүп, күнүнө 1 центке арзандап жатат. Фермер эң көп пайда алуу үчүн сатууну канча убакыт күтүшү керек? Уйларды күтпөстөн тез сатуу мене салыштырганда канча пайда утат ?

647. Бизнесмен Нуркалый ар бири 20 миң доллардан эки унаа сатып алып жана аларды кайра саткан. Биринчи унааны кайра

сатууда кирешеси p_1 %, экинчисинен- p_2 % түзөт жана $p_1 + p_2 = 20$. Нуркалый экинчи сатуу жөнүндө салык инспекциясына билдирген эмес, ошондуктан экинчи унааны сатуудан алынган $25\,p_1$ % кирешени түзгөн айып пул алышкан. Нуркалыйдын сатуусу пайдалуу болдубу? Анын мүмкүн болгон максималдуу чыгашасы кандай?

648. Эгерде фирманын чыгымы $C(q) = q^2 + 1$, пайдасы $R(q) = 16q - q^2$, салык t чени менен акциздик болсо, фирманын кирешеси жана анын салык саясатына талдоо жүргүзгүлө.

649. С ишканасынын чыгашалары менен өндүрүлгөн x продукциясынын көлөмүнүн ортосундагы байланыш төмөнкү формула менен туюнтулат

$$C(x) = \begin{cases} 48x, x \le 125, \\ 375 + (x - 50)^2, 125 < x \le 150. \end{cases}$$

Эки түрдүү базарда продукциялардын бирдиктерин сатуудан түшкөн пайда

$p(x) = 120 - \frac{4}{3}\sqrt{x}$ түзөт жана тиешелүү түрдө $p(x) = 120 + \frac{x}{6}$. Ишкананын жетекчисине продукциянын саны боюнча кандай сунуштарды берууге болот? Кайсы базарды алса болот?

650. $q -$ сатылган товарлардын саны болсун. Эгерде товарды өндүрүүгө кеткен чыгымдар жана киреше тиешелүү түрдө төмөнкү формулалар

$$c(q) = q^3 - 40q^2 + 147q + 2000, r(q) = 90q - 10q^2$$

менен туюнтулган болсо кирешенин максимумун тапкыла.

Жооптор

10. $2x^4 - 5x^2 - 10$. **11.** -35, -16, -7, 20. **12.** 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $-\frac{x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. **13.** $\pi, \frac{\pi}{2}, 0$. **14.** $x^2 - 5x + 6$. **17.** $(-\infty, +\infty)$. **18.** $[-1,2]$. **19.** $(-\infty, -2), (2, +\infty)$. **20.** $(-\infty, -1), (-1,1), (1, +\infty)$. **21**. $[1,4]$. **22.** $(-\infty, 1), (1, +\infty)$. **23.** $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, мында $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **24.** $[-4,4]$. **25.** $(-\infty, +\infty)$. **26.** $[1,4]$. **29.** а) жуп, б) жуп, в) так, г) жуп да так да эмес. **30.** а) мезгили $\frac{\pi}{2}$, б) мезгили π, в) мезгили 2π, г) мезгилсиз. **65.** $a_n = \frac{n}{n+2}$. **66.** $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. **67.** $a_n = \frac{1}{2n-1}$. **74.** $\frac{3}{5}$. **75**. 0,01. **76.** ∞. **77.** 0. **78.** 1. **79.** $\frac{1}{2}$. **80.** 0. **81.** 1. **82.** $\frac{1}{2}$. **83.** $-\frac{3}{2}$. **84.** 1. **94.** $(-\infty, +\infty)$. **95.** $(+\infty, 0)$. **96.** $(4,3)$. **109.** 0. **110**. ∞. **111.** 0. **112.** $\frac{3}{5}$. **113.** 1. **114.** $\frac{1}{64}$. **115.** 0. **116.** 1. **117.** $\frac{\pi}{6}$. **118.** $\frac{\pi}{6}$. **119.** ∞. **120.** ∞. **121.** 0. **122.** $x \to +\infty$ болгондо 0, $x \to -\infty$ болгондо ∞. **123.** 0. **124.** 0. **131.** -2. **132.** 10. **133.** $\frac{1}{8}$. **134.** $\frac{3}{4}$. **135.** $\frac{5}{2}$. **136.** 4. **137.** $-\frac{1}{2}$. **138.** $\frac{a-1}{3a^2}$. **139.** $-\frac{1}{2}$. **140.** 1. **141.** 4. **142.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **143.** 0. **144.** $x \to +\infty$ болгондо 0, $x \to -\infty$ болгондо ∞. **145.** $\frac{1}{2}$. **146.** 1. **147.** $\frac{2}{3}$. **148.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **149.** 12. **150.** -2. **151.** $\frac{3}{2}$. **152.** $\frac{2}{3}$. **153.** 0. **154.** 0. **155.** $-\frac{3}{2}$. **156.** $\frac{1}{2}$. **157.** 0. **158.** ∞ . **159.** ∞ . **160.** 1. **161.** 2. **162.** 0. **163.** 1. **166.** $\frac{5}{3}$. **167.** $\frac{2}{3}$. **168.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **169.** Эгерде $n > m$ болсо 0; эгерде $n = m$ болсо 1; эгерде $n < m$ болсо ∞. **170.** $\frac{1}{2}$. **171.** $\sqrt{2}$. **172.** $2\cos\alpha$. **173.** $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$. **174.** α. **175.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **176.** 1. **177.** $\frac{1}{2}$. **178.** ∞ . **185.** e. **186.** $e^{\frac{3}{2}}$. **187.** 1. **188.** e. **189.** e. **190.** e. **205.** $C = 1, k = 2$. **206.** $C = \frac{1}{2\ln 2}, k = 1$. **207.** $C = -\frac{1}{4}, k = 3$. **208.** $C = 1, k = 2$. **223.** $\frac{1}{4}$. **224.** $cos^3\alpha$. **225.** 0. **226.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **227.** 0. **228.** $\frac{1}{2}$. **229.** $\frac{2}{3}$. **230.** $\frac{1}{3}$. **231.** $\frac{m}{n}$. **232.** e. **233.** 1. **234.** 2. **235.** $\frac{3}{2}$. **236.** $\frac{m}{n}$. **237.** 0. **238.** $\frac{1}{a}$. **239.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. **240.** a. **241.** $\frac{2a}{b}$. **242.** $\ln\frac{a}{b}$. **243.** $\frac{2\ln a}{\beta}$. **244.** $ln^2 a$. **245.** $-\frac{5}{6}$. **246.** π. **247.** 1. **248.** e. **249.** 0. **250.** 1. **251.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **252.** $e\sqrt{e}$. **253.** e^{ctga}. **254.** $\frac{1}{e}$. **255.** e. **256.** $\frac{2}{5}$.

257. $\frac{2}{3}$. **258.** 1. **259.** $\frac{1}{3}$. **265.** $x = 0$ чекитинде жоюулуучу үзүлүү; $y = \begin{cases} \frac{\text{tg}\, x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ функциясы $x = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз. **266.** $x = 0$ чекитинде жоюулуучу үзүлүү: $y = \begin{cases} x^3 + 1, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ функциясы $x = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз. **267.** $x = 1$ чекитинде 1-түрдөгү үзүлүү: $\lim\limits_{x \to 1+} y = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-} y = -1$. **268.** $x = 1$ чекитинде жоюулуучу үзүлүү: $\lim\limits_{x \to 1} y = \frac{\pi}{2}$. **269.** $x = 0$ чекитинде 1- түрдөгү үзүлүү: $\lim\limits_{x \to 0+} y = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-} y = 1$. **270.** $x = 0$ чекитинде 1- түрдөгү үзүлүү: $\lim\limits_{x \to 0+} y = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} y = -1$. **271.** $x = 0, x = 1, x = -1$ чекитинде 2- түрдөгү үзүлүү: $\lim\limits_{x \to 0+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-} y = \infty$, $\lim\limits_{x \to -1+} y = -\infty$. $\lim\limits_{x \to -1-} y = +\infty$. **272.** $x = 6$ чекитинде 2- түрдөгү үзүлүү: $\lim\limits_{x \to 6+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 6-} y = -\infty$, $x = -6$ чекитинде жоюулуучу үзүлүү; $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36}, & x \neq -6, \\ -\frac{1}{72}, & x = -6 \end{cases}$ функциясы $x = -6$ чекитинде үзгүлтүксүз. **278.** $10x^4 - 9x^2 + 4$. **279.** $7x^2 - 5x + 6$. **280.** $2ax + b$. **281.** $nx^{n-1} + 3nx^2$. **282.** $-\frac{16}{7x^2\sqrt[7]{x^2}} + \frac{2}{x^3}$. **283.** $1 - 7\sqrt[6]{x} + 16\sqrt[3]{x} - 12\sqrt{x}$. **284.** $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x\sqrt{x}} - \frac{12}{x^2\sqrt{x}}$. **285.** $\ln x$. **286.** $x^2 e^x$. **287.** $2e^x \sin x$. **288.** $-\frac{x^3}{sin^2 x} + 3x^2 \text{ctg} x$. **289.** $\frac{3^x}{\sqrt{1-x^2}} + 3^x \ln 3 \arcsin x$. **290.** $1 + 2x \,\text{arctg}\, x$. **291.** $\frac{2x - \sin x \cos x}{2x\sqrt{x} cos^2 x}$. **292.** $-\frac{1+2x\, \text{arctg}\, x}{(1+x^2)^2}$. **293.** $\frac{2x \arccos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$. **301.** $10(x^2 + 1)^9 2x$. **302.** $\frac{2ax+b}{3\sqrt[3]{(ax^2+bx+c)^2}}$. **303.**$-e^{-x}$. **304.** $3\cos 3x$. **305.** $\frac{5}{cos^2 5x}$. **306.** $\frac{1}{\sin x \cos x}$. **307.** $-4^{\cos x} \ln 4 \sin x$. **308.** $(2x + 5)\cos(x^2 + 5x + 1)$. **309.** $-4\; cos^3 x \sin x$. **310.** $\frac{2x+3}{x^2+3x+4}$. **311.** $\frac{2x}{cos^2(x^2+1)}$. **312.** $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **313.** $-\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$. **314.** $\frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$. **315.** $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **316.** $-\frac{1}{x}\sin(\ln x)$. **317.** $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$.

318. $\frac{1}{2\sqrt{1+\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}$. **319.** $-x^3e^{-x}$. **320.** $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **321.** $\frac{cos^3x}{\sin x}$. **322.** $\frac{(x^2+1)-x^2\ln x}{x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **323.** $\frac{cos^2x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\cos x\sin x$. **324.** $\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{1+x^2}}$. **325.** tg^5x. **326.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. **327.** $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. **328.** $\frac{1}{ch^2x}$. **329.** $4shxchx$. **330.** $x^2shx+2xchx$. **331.** $\frac{shx-xchx}{sh^2x}$. **332.** $\frac{1}{shx\ chx}$. **333.** $2^{shx}\ln 2\ chx$. **341.** $\frac{1}{\sin x}$. **342.** $4^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}}\ln 4\cdot\frac{1}{x(x^2-1)}$. **343.** $5\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^4\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **344.** $\frac{8x\ tg^3(x^2+1)}{cos^2(x^2+1)}$. **345.** $-\frac{e^{\arcsin\frac{1}{x}}}{x\sqrt{x^2-1}}$. **346.** $2\ tg^22x(3-2sin^22x)$. **347.** $\frac{sin^2x\left[3\left(1+2^{x^2}\right)\cos x-2x\cdot 2^{x^2}\sin x\ln 2\right]}{\left(1+2^{x^2}\right)^2}$. **348.** $\frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-x^{2x^2}}}$. **349.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **350.** $\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$. **351.** $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$. **352.** $-\frac{3\cos 3x\left(2\ sin^23x+3\ \ cos^23x\right)}{sin^43x}$.

353. $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}$. **354.**

$-\frac{2}{(x+1)^2}ctg\frac{2x+4}{x+1}$. **355.** $\frac{e^{sin^2x}\left[4(1+tgx)\sin x\ \ cos^3x-1\right]}{2(1+tgx)^{3/2}\ \ cos^2x}$. **356.** $\frac{2}{\sin 2x\ln\ tgx}$.

357. $\frac{\sqrt{5}(x^8+x^6+x^2+1)}{x^{10}+1}$. **358.** $\frac{1}{\sqrt{(x^2+3x+1)^3}}$. **359.** $4sh^3(x^2+2x+1)ch(x^2+2x+1)(2x+2)$. **360.** $4^{ch^3x}\ln 4\cdot 3\ ch^2x\cdot shx$. **361.** $\frac{1}{shx\ chx}$. **367.** $\frac{23}{24\sqrt[24]{x}}$. **368.** $\frac{2}{cos^22x}$. **369.** $-ctgx$. **370.** $\frac{2x+3}{4(x^2+3x+1)}-\frac{2x}{3(x^2+4)}$. **371.** $\frac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}$. **372.** $\frac{2\sqrt{2}}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}$. **373.** $x^6(x^2+1)^{10}(x^3+1)^5\left(\frac{6}{x}+\frac{20x}{x^2+1}+\frac{15x^2}{x^3+1}\right)$. **374.** $\sqrt[3]{\frac{(x^2+1)x}{sin^2x}}\left[\frac{2x}{3(x^2+1)}+\frac{1}{3x}-\frac{2}{3}ctgx\right]$. **375.** $e^{x^2}\mathrm{tg}^3x\ \arcsin x\left(2x+\frac{3}{\sin x\cos x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$. **376.** $\frac{\sqrt{2}}{\cos x+\sin x}$. **377.** $\frac{\sqrt{5}}{2+3\cos x}$. **378.** $\frac{1}{x^3+1}$. **379.** $x^x(1+\ln x)$. **380.** $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$.
381. $(\cos x)^{arctg\ x}\left(\frac{ln\cos x}{1+x^2}-\ tgx\cdot arctg\ x\right)$. **382.** $(x^2+3)^{\sqrt{x}}\left[\frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3}+\frac{\ln(x^2+3)}{2\sqrt{x}}\right]$. **383.** $-(1-x^2)^{\arccos x}\left[\frac{2x\arccos x}{1-x^2}+\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]$. **384.** $-\sqrt[x]{arctg\ x}\left[\frac{1}{x(1+x^2)arcctg\,x}+\frac{\ln\mathrm{arcctg}\,x}{x^2}\right]$. **387.** $\frac{3}{2}$. **388.** $\frac{4}{5}\ln 2$. **389.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

390. 1. **391.** 0. **394.** $7x-y-2=0$. **395.** $x-y-1=0$. **396.** $x+3y-10=0$. **397.** Жаныма $x+y-4=0$, нормаль $x-y=0$. **398.** Жаныма $2x-y+2-\frac{\pi}{2}=0$, нормаль $x+2y-4-\frac{\pi}{4}=0$. **399.** $arctg\,\frac{1}{2}\approx 26^{\circ}34'$. **400.** $\frac{\pi}{4}$. **401.** $(2,5)$. **404.** 2. **405.** $v=gt$. **406.** 10 см\сек. **409.** $-\frac{dx}{1+x^2}$. **410.** $\frac{5(\arcsin x)^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **411.** $2^{tg^2x}\ln 2\cdot 2\,\mathrm{tg}\,x\frac{dx}{cos^2x}$. **412.** $\frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{1+sin^2x}}$. **413.** $x^2(1+3\ln x)dx$. **414.** $-5ctg^4(x^2+x^3)\cdot\frac{1}{sin^2(x^3+x^2)}(3x^2+2x)dx$. **415.** $-2\cos\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\frac{dx}{2\sqrt{x}}$. **416.** $\frac{dx}{2(1+x^2)\sqrt{1+arctgx}}$. **417.** $\frac{1-x\,arctg\,x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$. **418.** $-\frac{2\sin x dx}{3\sqrt[3]{2+\cos x}}$. **419.** $-\frac{2^x\ln 2dx}{\sqrt{1-2^{2x}}}$. **420.** $(2x\,arctg\,x-1)dx$. **430.** 2,02. **431.** 2,96. **432.** -0,1.**433.** 0,485. **441.** $\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **442.** $\frac{4}{(x-1)^3}$. **443.** $\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **444.** $\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. **445.** 0. **446.** $120\,(3x^2+1)$. **447.** $-\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}$. **448.** $5!=120$. **449.** $-4(2x^2\cos 2x+6x\sin 2x-3\cos 2x)$. **450.** $24\ln x+50$. **451.** $y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **452.** $y^{(n)}=(-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$. **453.** $y^{(n)}=n!$. **454.** $y^{(n)}=(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$, мында $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ $\frac{n+1}{2}$нин бүтүн бөлүгүн түшүндүрөт. **455.** $y^{(n)}=\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$. **456.** 14 м/сек^2. **461.** $\frac{-3x^2y+6xy^2+3}{x^3-6x^2y+15y^2}$. **462.** $\frac{2x^3y-2xy^3+y}{x^4+x^2y^2+x}$. **463.** $\frac{12y^5(xy^2+1)}{(3xy^2+2)^3}$. **464.** $\frac{13}{32}$. **465.** $4x-3y-1=0$. **466.** $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$. **467.** $yy_1=p(x+x_1)$. **470.** $\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **471.** $\frac{dy}{dx}=-1$. **472.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. **473.** $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{t^2+t-1}{e^{2t}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$. **474.** $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{atsin^3t}$. **475.** $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$. **476.** Жаныма $y=\sqrt{3}x+a\left(2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$, нормаль $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a\pi}{3\sqrt{3}}$. **477.** $t=1$ болгондо $M(2,1)$. **482.** $\xi=1$. **483.** $0{,}947<arctg\,1{,}5<1{,}025$. **484.** $\xi=\frac{\pi}{4}$. **488.** $P(x)=(x-1)^4+2\quad(x-1)^3+5(x-1)+2$. **489.** $P(x)=x^6-6x^5+21x^4-44x^3+63x^2-54x+9$. **490.** $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$.

491. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\left(\frac{x-2}{2}\right)^4\right]$. **495.** 0,0002. **496.** $\max\limits_{0\le x\le\frac{1}{2}}|\delta(x)|=\max\limits_{0\le x\le\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^4<\frac{1}{64}$. **497.** $\max\limits_{0\le x\le\frac{1}{2}}|\delta(x)|=\max\limits_{0\le x\le\frac{1}{2}}|R_3(x)|<\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot8}<0{,}01;$ $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}\approx1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{4}\approx1{,}22$. **503.** $\frac{2}{3}$. **504.** $-\frac{3}{2}$. **505.** 0. **506.** 0. **507.** $\frac{1}{4}$. **508.** -2. **509.** -2. **513.** 0. **514.** 0. **515.** 0. **516.** $\frac{1}{2}$. **517.** $-\infty$. **521.** 1. **522.** 1. **523.** e. **524.** 1. **525.** $e^{\frac{1}{e}}$. **531.** $x\to+\infty$ болгондо $x=2, x=-2, y=x$. **532.** $x\to+\infty$ болгондо $y=\frac{\pi}{2}x-1$ жана $x\to-\infty$ болгондо $y=-\frac{\pi}{2}x-1$. **533.** $x\to\pm\infty$ болгондо $x=-3, y=1$. **534.** $x\to\pm\infty$ болгондо $x=1, y=2x$. **535.** $x\to0-$ болгондо $x=0$. **536.** $x\to-1+$ болгондо $x=-1, x\to+\infty$ болгондо $y=0$. **537.** $x\to\pm\infty$ болгондо $y=0$. **538.** $x\to+\infty$ болгондо $y=x+1$. **540.** $-\infty<x<0$ болгондо кемийт, $0<x<+\infty$ болгондо өсөт. **541.** $-\infty<x-2$ жана $1<x<+\infty$ болгондо өсөт, $-2<x<1$ болгондо кемийт. **542.** $-\infty<x<1$ болгондо кемийт, $1<x<\infty$ болгондо өсөт. **543.** Бардык $0x$ огунда өсөт. **547.** $M=f(0)=1, m=f(1)=0$. **548.** $m=f(-1)=\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$. **549.** $m=f(-1)=\frac{1}{4e}$. **550.** Экстремумдары жок. **551.** $M=f(1-\sqrt{19})\approx-14, m=f(1+\sqrt{19})\approx5{,}5$. **556.** $\min\limits_{[-1,3]}f(x)=f(\pm1)=2$, $\max\limits_{[-2,1]}f(x)=f(-2)=11$. **557.** $\min\limits_{[-1,3]}f(x)=f(3)=-\frac{5}{13}$, $\max\limits_{[-1,3]}f(x)=f(0)=1$. **558.** $\min\limits_{[-2,1]}f(x)=f(0)=1$, $\max\limits_{[-2,1]}f(x)=f(-2)=3$. **559**. 2см. **560.** $AC=OD$. **561.** 33+33. **562.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. **563**. $3\sqrt{3}r^2$. **564.** $2R^2$(квадрат). **565.** Тең жактуу (каптал жактары $\frac{p}{2+\sqrt{2}}$) . **566.** $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$, $h=\sqrt{2}\frac{d}{\sqrt{3}}$. **567.** $r=h=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **568**. $\alpha=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\approx72^\circ$. **569.** $AB=40$ см. **570.**

$a\sqrt{2}, b\sqrt{2}$. **571.** $u(x) = \frac{q_1}{a-ex} + \frac{q_2}{a+ex}$; $\max\limits_{[-2,2]} u(x) = u(2) = \frac{13}{3}$, $\min\limits_{[-2,2]} u(x) = u\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{9}{4}$. **572.**
$\min\limits_{[-2,2]} u(x) = u(-2)$, $\max\limits_{[-2,2]} u(x) = u(2)$. **573.** $AM = \frac{d}{1+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$. **576.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1, x_3 = 2$. **577.** $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$. **578.** $x_1 = -2 + e^{\frac{8}{3}}$. **579.** $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. **580.** $x_1 = -4$. **587.** $x \to -\infty$ болгондо горизонталдык асимптота $y = 0$; $m = f(-3) \approx -1$; ийилүү чекити 0 жана $3 \pm \sqrt{3}$. **588.** Асимптоталар $x = -1, y = 0$; $m = f(0) = 1$; ийилүү чекиттери жок. **589.** $(-\infty, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = -\infty$; жуп; $m = y(0) = 2, M = y(\pm1) = \frac{5}{2}$; $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ болгондо ийилүү. 5**90.** $(-\infty, 0)(0, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0\pm} y(x) = \pm\infty$; $x_1 = 2, x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$ болгондо $y = 0$; $M = y(1) = 2$; $x = -\sqrt[3]{2}$ – ийилүү чекити. 5**91.** $(-\infty, -1)(-1, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to -1\pm} y(x) = \pm\infty$; асимптоталар $x = 1$ жана $y = x - 3$; $m = y(0) = 0, M = y(-4) = -9\frac{13}{27}$; ийилүү чекиттери жок. **592.** $(-\infty, -2)(-2, 2)(2, +\infty)$ жуп; асимптоталар $x = \pm2$ жана $y = -1$; $m = y(0) = 2$; ийилүү чекиттери жок. **593.** $(-\infty, -2)(2, +\infty)$; асимптоталар $x = 2$ жана $y = 1$; $x = 0$ болгондо $y = 1$ жана $y = 0$ болгондо $x = -2$; $m = y(2) = 0$; $x = -4$ – ийилүү чекити. **594.** $(-\infty, +\infty)$; так; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = \pm\infty$; $y = x$ – асимптота; $m = y(1) = -\sqrt[3]{2}, M = y(-1) = \sqrt[3]{2}$; ийилүү чекиттери $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0{,}0)$; $(\sqrt{3}, 0)$.
595. $(-\infty, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = +\infty$; $k = 0, b = +\infty$; x тин чоң маанисинде ийри төмөн карай ийилген (томпок); $x = 0$ болгондо $y = \ln 2$ жана $y = 0$ болгондо $x = 1$; $m = y(1) = 0$; ийилүү чекиттери - $(2, \ln 2), (0, \ln 2)$. **596.** $(-\infty, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = +\infty$; $k = \infty$; x тин чоң маанисинде ийри жогору карай ийилген

(иймек); $x = 0$ болгондо $y = -4$ жана $x_1 = -2,\ x_2 = 1$ болгондо $y = 0$; $m = y(0) = y(-1) = -4, M = y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{63}{16}$. **597.** $(-\infty, +\infty)$; так; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y\,(x) = \pm\infty$; асимптоталар $x = +\infty$ болгондо $y = x + \frac{\pi}{2}$ жана $x = -\infty$ болгондо $y = x - \frac{\pi}{2}$; экстремум чекиттери жок; ийилүү (0,0) чекитте. **598.** $[-1,1]$; так; $m = y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -0{,}68$ жана $M = y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}68$; ийилүү (0,0) чекитте. **599.** $(-\infty, +\infty)$; жуп; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y\,(x) = 0$; $y = 0$ – асимптота; $x = 0$ болгондо $y = 0$; $m = y(0) = 0,\ M = y(\pm 1) = e^{-\frac{1}{3}}$; $x_{1,2} \approx \pm 3{,}2$ болгондо ийилүүгө ээ болот. **602.** $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ – эллипстин чокулары. **603.** $K = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **604.** $x_K = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. **605.** $K = \frac{2}{3a\ \sin 2t}$. **607.** $R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$. **608.** $R = \frac{17\sqrt{17}}{2}$. **609.** а) $\frac{\sqrt{(1+9x^4)^3}}{6|x|}$, б) $|at|$, в) $4\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. **612.** $x_C = y_C = 2$; $Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$.

А Д А Б И Я Т Т А Р

1. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах изадачах: М., Краснодарь: Лань 2008.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа т 1. Учебник. М.: Наука, 1968.
3. Кручкович Г.И. Сборник задач по курсу высшей математики: Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1973.
4. Шевалдина О. Я. Математика в экономике.: Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016.
5. Ильин В.А. Математический анализ: Учебник ч.1. М.: Проспект: Изд-во МГУ, 2006.
6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. ч1. М.: Высшая школа, 1986.

Басууга берилди: 25.03.2025-ж.

Форматы 60x90 1/16. Көлөмү: 12,5 б.т.

Буюртма № 16/25.

“Book-дизайн” полиграфия борбору

Кыргыз Республикасы, Ош шаары, И. Сулайманов көч. 3.